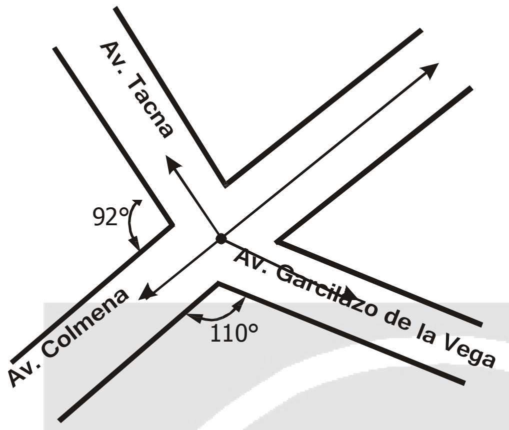
Ángulos I



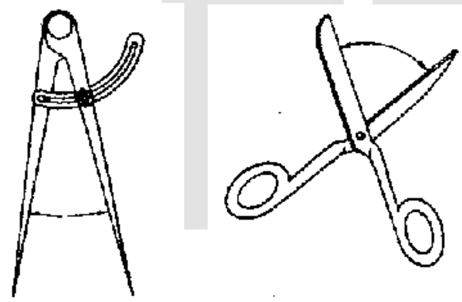
¿Cuál es el menor ángulo que forman la Av. Tacna con la Av. Colmena y cuál es el menor ángulo que forman la Av. Garcilazo de la Vega con la avenida Tacna?

Introducción:

Cuando manipulamos una tijera o usamos un compás de repente sin darnos cuenta nos encontramos con la idea de un ángulo geométrico.

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar el ángulo geométrico, su clasificación y resolveremos problemas sencillos sobre medición, esto hará que entendamos mejor los capítulos posteriores como triángulos.

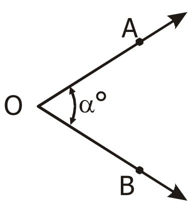
Observe las figuras de abajo:



El compás y la tijera, nos dan la idea de ángulos

Definición:

Un ángulo es la reunión de dos rayos mediante su origen. Su medida está dada por la abertura entre sus lados y se expresa en grados sexagesimales.



Elementos:

Vértice : O

Lados : $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$

Medida : $\alpha°$

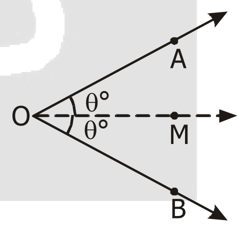
Notación:

- Ángulo AOB $\begin{cases} \angle AOB,\ \angle BOA \\ \hat{AOB},\ \hat{BOA} \\ \angle O,\ \hat{O} \end{cases}$

- Medida del ángulo AOB = $m\angle AOB$

- **Bisectriz de un ángulo:**

Es el rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo y divide a dicho ángulo en medidas iguales.

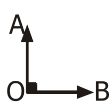
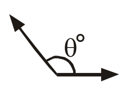


$m\angle AOM = m\angle MOB$

Clasificación:

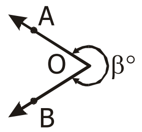
I. De acuerdo a su medida:

$\angle$ **Convexo:**

- $\angle$ Agudo:  $0° < \alpha° < 90°$
- $\angle$ Recto:  $m\angle AOB = 90°$
- $\angle$ Obtuso:  $90° < \theta° < 180°$

∡ **Llano**:

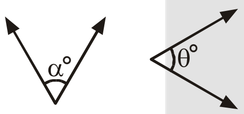
∡ **No convexo**:



$180° < \beta° < 360°$

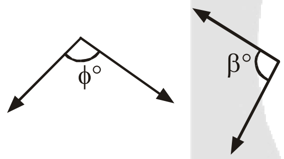
II. <u>Por la suma de dos ángulos</u>

- ∠**s Complementarios:** Son aquellos dos ángulos que suman 90°.



$\boxed{\alpha° + \theta° = 90°}$

- ∠**s Suplementarios:** Son aquellos dos ángulos que suman 180°.



$\boxed{\beta° + \phi° = 180°}$

<u>Observación</u>:

Sea: "x°" la medida de un ángulo.

Entonces:

Complemento de x° = (90° - x°)
Suplemento de x° = (180° - x°)

Ejemplos:

1. Hallar el complemento de 36°.

Solución: 90° - 36° = 54°

2. Hallar el suplemento de 48°.

Solución: 180° - 48° = 132°

3. Hallar el complemento del suplemento de 100°.

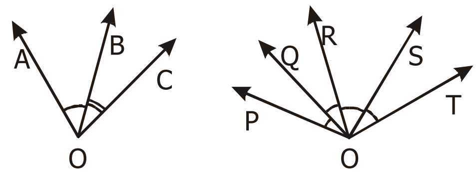
Solución: 90° - (180° - 100°)
90° - 80° = 10°

4 Hallar el suplemento del complemento de 40°.

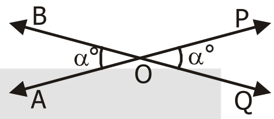
Solución: 180° - (90° - 40°)
180° - 50° = 130°

III. <u>Por sus relaciones gráficas</u>

- ∡**s Consecutivos o adyacentes**

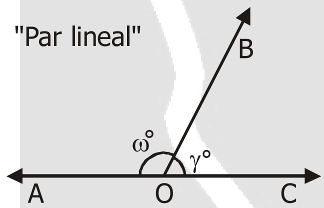


- ∡**s Opuestos por el vértice**



- ∡**s Adyacentes y suplementarios**

"Par lineal"



$\omega° + \gamma° = 180°$

➲ Problemas resueltos

1. Indique el triple de la mitad del complemento de 40°.

<u>Solución</u>:

Del enunciado planteamos:

$$= 3\left[\frac{1}{2}\,C_{40°}\right] = \frac{3}{2} \times 50° = 75°$$

2. La suma del complemento y el suplemento de un ángulo es igual a 140°. Hallar la medida del ángulo.

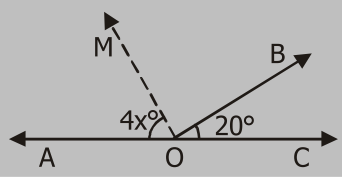
<u>Solución</u>:

Sea "x" la medida del ángulo.
Del dato:

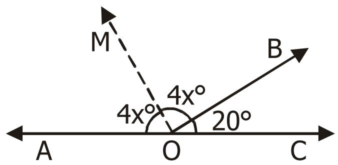
$$C_x + S_x = 140°$$

$$(90° - x) + (180° - x) = 140°$$
$$130° = 2x$$
$$65° = x$$

3. Calcular "x", si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB.



Solución:

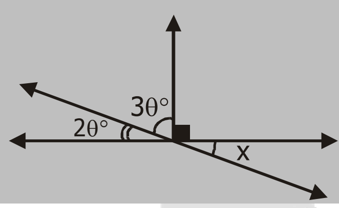


Como $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle$AOB

$$\Rightarrow \angle AOM = \angle MOB = 4x°$$

$$\Rightarrow 4x + 4x + 20° = 180° \Rightarrow x = 20°$$

4. En la figura, calcular "x".



Solución:

Hallamos primero "θ"

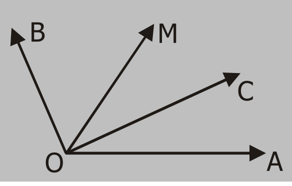
$$2\theta + 3\theta = 90°$$
$$5\theta = 90°$$
$$\theta = 18°$$

Por$\measuredangle$ s opuestos por el vértice:

$$x = 2\theta$$
$$x = 2(18°)$$
$$x = 36°$$

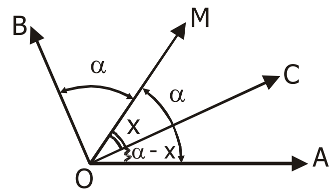
5. En la figura, hallar " m$\measuredangle$MOC";

Si: m$\measuredangle$BOC - m$\measuredangle$AOC = 40°, además $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB.



Solución:

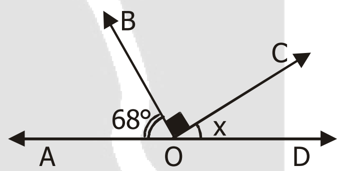
Graficando según los datos:



$$m\angle BOC - m\angle AOC = 40°$$
$$\text{Reemplazando } (\alpha + x) - (\alpha - x) = 40°$$
$$2x = 40$$
$$x = 20°$$

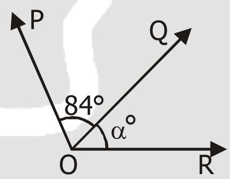
Problemas para la clase

1. Calcular "x"



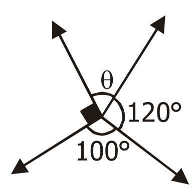
a) 32° b) 22° c) 28°
d) 20° e) 18°

2. Calcular "α", siendo: m$\measuredangle$POR = 128°.



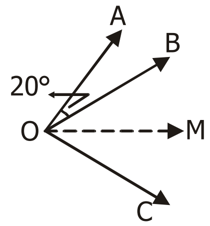
a) 44° b) 56° c) 46°
d) 48° e) 50°

3. Calcular "θ"



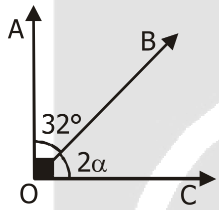
a) 50° b) 60° c) 45°
d) 40° e) 93°

4. Si: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\measuredangle$BOC, m$\measuredangle$BOC = 48°.
Hallar: m$\measuredangle$AOM



a) 34° b) 42° c) 44°
d) 38° e) 46°

5. Calcular "α"



a) 24° b) 34° c) 30°
d) 32° e) 29°

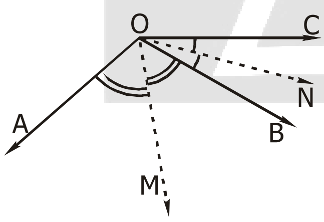
6. Hallar el suplemento de 126°.

a) 44° b) 54° c) 64°
d) 58° e) 48°

7. Hallar el complemento de 49°.

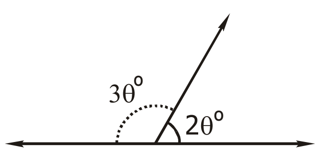
a) 51° b) 41° c) 61°
d) 57° e) 47°

8. Si: m$\measuredangle$AOB = 100° y m$\measuredangle$BOC = 40°. Hallar : m$\measuredangle$MON



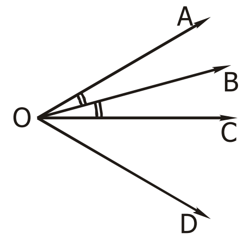
a) 60° b) 80° c) 70°
d) 50° e) 75°

9. Calcular "θ"



a) 20° b) 18° c) 36°
d) 48° e) 72°

10. $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son bisectrices de $\angle$AOC y $\angle$AOD respectivamente. Si: m$\angle$AOD = 60°.
Hallar: m$\angle$BOC.



a) 20° b) 25° c) 15°
d) 22° e) 10°

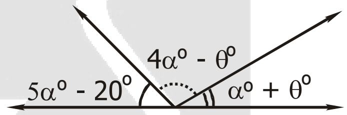
11. Hallar el suplemento del complemento de 80°.

a) 160° b) 150° c) 170°
d) 135° e) 75°

12. Hallar el complemento del suplemento de 150°.

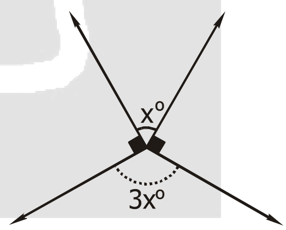
a) 50° b) 60° c) 30°
d) 48° e) 75°

13. Calcular "α°"



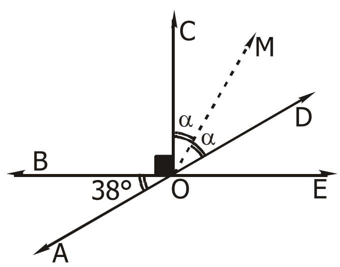
a) 15° b) 25° c) 20°
d) 30° e) 35°

14. Calcular "x"



a) 40° b) 45° c) 36°
d) 48° e) 35°

15. Hallar: m$\measuredangle$MOE



a) 64° b) 74° c) 58°
d) 54° e) 72°

Autoevaluación

* Compruebe sus conocimientos adquiridos, resuelva:

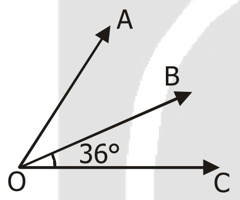
1. Dos ángulos "x" e "y" son complementarios, si "x" es los tres medios de "y". ¿Cuánto mide cada ángulo?

a) 36° y 54 b) 30° y 60°
c) 45° y 45° d) 20° y 70°
e) 10° y 80°

2. La diferencia de dos ángulos suplementarios es 36°. Hallar la medida de dichos ángulos.

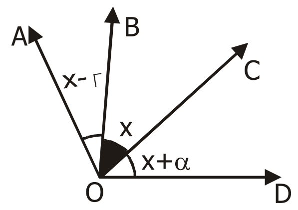
a) 108° y 72° b) 110° y 70°
c) 100° y 80° d) 120° y 60°
e) 130° y 50°

3. Si: m∡AOC = 4(m∡AOB); hallar m: ∡AOB.



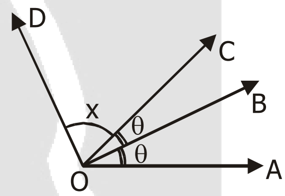
a) 25° b) 20° c) 15°
d) 10° e) 12°

4. Calcular "x", si: m∡AOD = 102°.



a) 28° b) 30° c) 34°
d) 38° e) 36°

5. Según el gráfico, el ángulo AOC es agudo y BOD es un ángulo obtuso. Si "θ" es máximo y entero, calcular el máximo valor entero de "x".

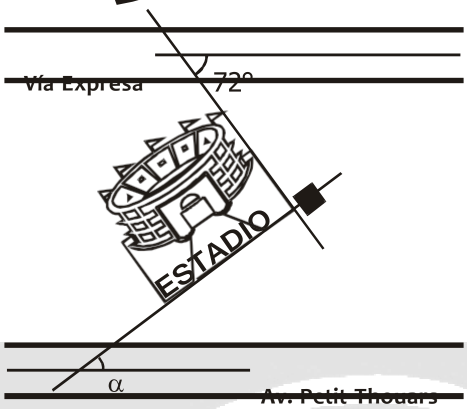


a) 140° b) 145° c) 125°
d) 135° e) 120°

Claves

1. a	2. a	3. e	4. c	5. d

Ángulos II



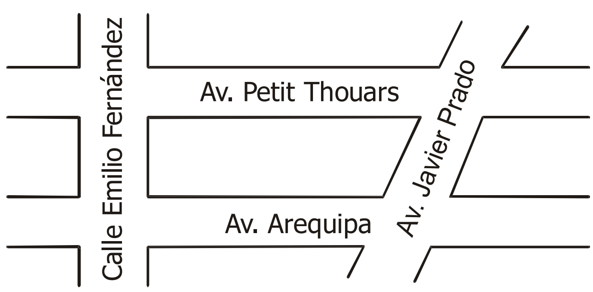
¿Cuál es el ángulo de inclinación entre el Estadio Nacional con la Avenida Petit Thouars?

Introducción:

Cuando viajamos de Lima hacia Miraflores muchos hacemos uso de los colectivos que van por la Arequipa.

Don Jorgito tiene dos hijos: Luchito y Carlitos, el primero estudia en el Colegio "Trilce Roma" ubicado a la altura de la cuadra 9 de la Av. Arequipa y el segundo en el colegio "Trilce San Isidro" en la cuadra 35 de dicha avenida, mientras Don Jorgito labora en el colegio "Trilce Miraflores" en un alto cargo ejecutivo. En su diario recorrido Luchito se baja en la calle Emilio Fernández que es **PERPENDICULAR** a la Av. Arequipa y para llegar a su destino debe cruzar la Av. Petit Thouars que es una avenida **PARALELA** a la Av. Arequipa, mientras Don Jorgito y Carlitos para llegar a sus respectivos centros de estudio y trabajo deben cruzar la congestionada Av. Javier Prado que es una **TRANSVERSAL** a la Av. Arequipa.

En este breve relato hemos usado términos que usaremos comúnmente en este capítulo donde hablaremos de rectas paralelas, rectas secantes y perpendiculares así como de los ángulos que se originan al cortar dos rectas paralelas con una tercera recta llamada secante o transversal.



Se observa que las avenidas Arequipa y Petit Thouars son paralelas y ambas son intersectadas por la calle perpendicular Emilio Fernández y la Av. transversal Javier Prado.

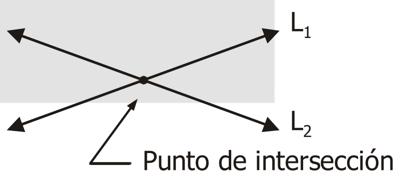
Rectas paralelas:

En **el plano** dos rectas son paralelas si no tienen puntos comunes.

$\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$

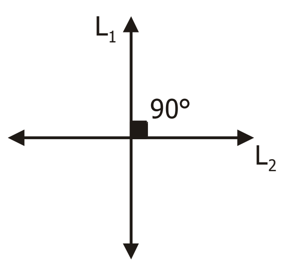
Rectas secantes:

En **el plano** dos rectas son secantes si tienen un punto de intersección.



Rectas perpendiculares:

Son rectas secantes que forman un ángulo recto (90°).

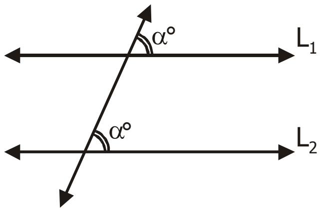


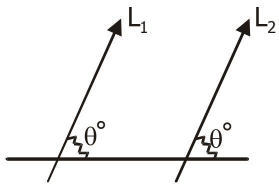
$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

1. Ángulos correspondientes

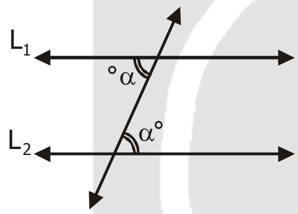
   Siendo: $\overleftrightarrow{L_1} \;//\; \overleftrightarrow{L_2}$





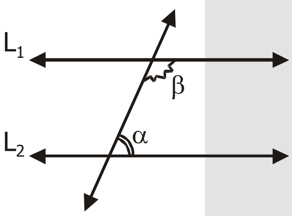
2. Ángulos alternos internos

   Siendo: $\overleftrightarrow{L_1} \;//\; \overleftrightarrow{L_2}$



3. Ángulos conjugados internos

   Siendo: $\overleftrightarrow{L_1} \;//\; \overleftrightarrow{L_2}$



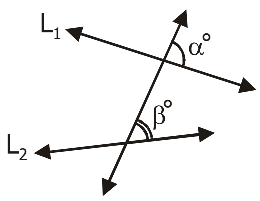
$\Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$

Observación:

Si las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ no son paralelas la nomenclatura de los ángulos se mantiene pero las propiedades no se cumplen.

Ejemplo:

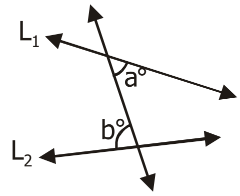
1.



$\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$

"α" y "β" son correspondientes pero $\alpha^\circ \neq \beta^\circ$

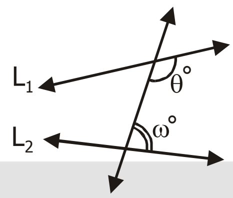
2.



$\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$

a° y b° son alternos internos pero $a^\circ \neq b^\circ$

3.

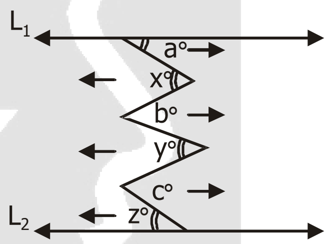


$\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$

"θ" y "ω" son conjugados internos pero $\theta^\circ + \omega^\circ \neq 180^\circ$

Propiedad

Siendo: $\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$

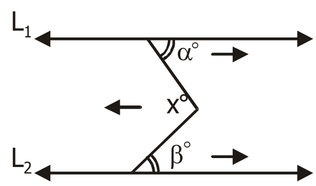


se cumple:

$$x^\circ + y^\circ + z^\circ = a^\circ + b^\circ + c^\circ$$

Caso particular:

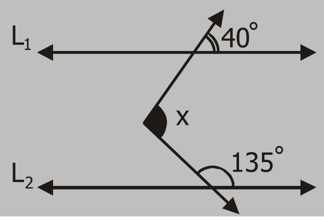
Siendo: $\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$



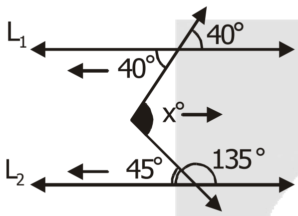
$$\Rightarrow x^\circ = \alpha^\circ + \beta^\circ$$

➲ Problemas resueltos

1. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x"

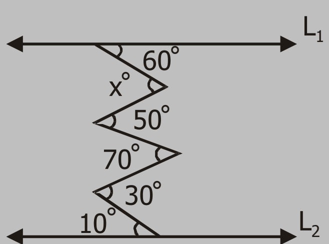


Solución:



$x = 40° + 45°$
$x° = 85°$

2. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x"

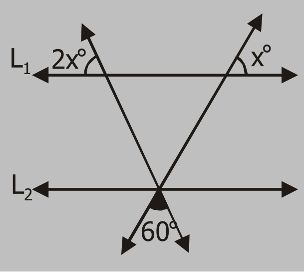


Solución:

Por la propiedad:

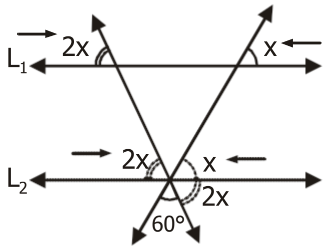
$$60° + 50° + 30° = x + 70° + 10°$$
$$140° = x + 80°$$
$$60° = x$$

3. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x"



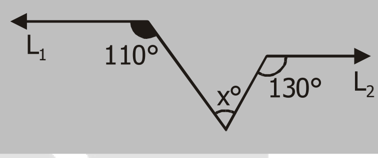
Solución:

Usando ángulos correspondientes colocamos los ángulos de tal manera que los tres estén alineados:



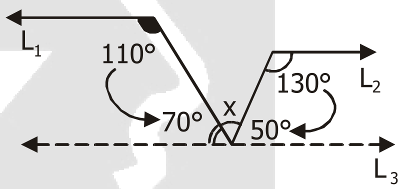
$$x + 2x + 60° = 180°$$
$$3x = 120°$$
$$x = 40°$$

4. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x"



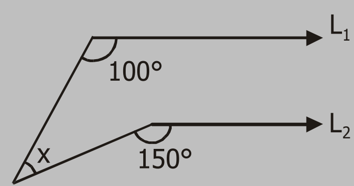
Solución:

Trazamos una paralela $\overleftrightarrow{L_3}$ a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ para utilizar el criterio de conjugados internos.



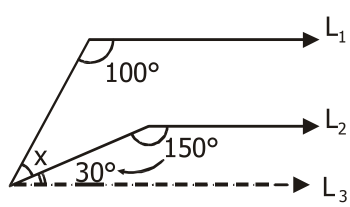
$\therefore\ 70° + x + 50° = 180° \quad \Rightarrow\ x = 60°$

5. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x"



Solución:

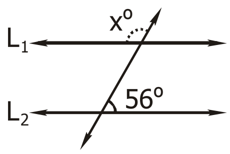
Trazamos $\overleftrightarrow{L_3}$ paralela a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ y aplicamos conjugados internos $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$.



$$100° + (x + 30°) = 180°$$
$$130° + x = 180°$$
$$x = 50°$$

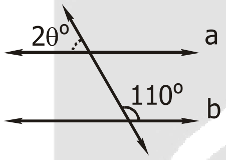
Problemas para la clase

1. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



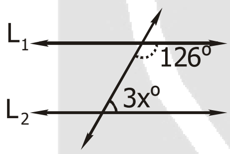
a) 124º b) 114º c) 56º
d) 120º e) 118º

2. Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, calcular "θ".



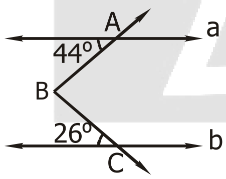
a) 30º b) 35º c) 40º
d) 45º e) 32º

3. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x".



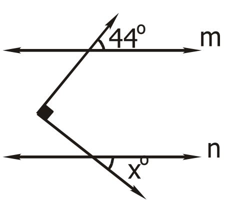
a) 20º b) 18º c) 24º
d) 25º e) 16º

4. Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, hallar: m∡ABC.



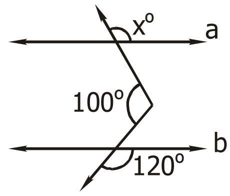
a) 60º b) 80º c) 70º
d) 50º e) 90º

5. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$.



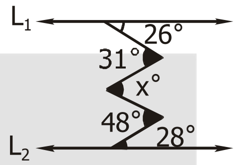
a) 46º b) 56º c) 44º
d) 54º e) 38º

6. Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, calcular "x".



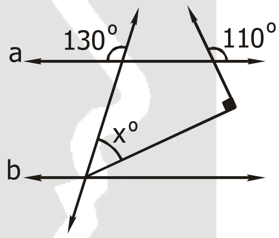
a) 120º b) 140º c) 150º
d) 130º e) 115º

7. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x".



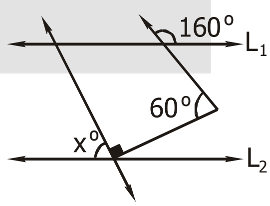
a) 20º b) 25º c) 30º
d) 35º e) 15º

8. Si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, calcular "x".



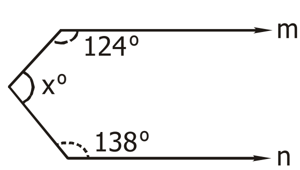
a) 10º b) 20º c) 30º
d) 15º e) 25º

9. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



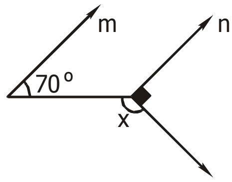
a) 40º b) 50º c) 60º
d) 45º e) 30º

10. Si: $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, calcular "x".



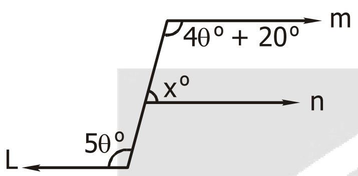
a) 98º b) 108º c) 118º
d) 90º e) 112º

11. Si: $\overleftrightarrow{m}$ ■ $\overleftrightarrow{n}$, calcular "x".



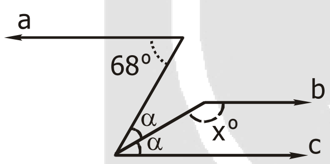
a) 140° b) 150° c) 160°
d) 130° e) 135°

12. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{m}$ ■ $\overleftrightarrow{n}$ ■ $\overleftrightarrow{L}$.



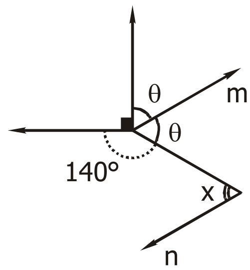
a) 70° b) 60° c) 80°
d) 65° e) 85°

13. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{a}$ ■ $\overleftrightarrow{b}$ ■ $\overleftrightarrow{c}$.



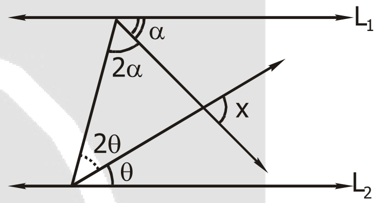
a) 136° b) 146° c) 152°
d) 140° e) 130°

14. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{n}$.



a) 55° b) 65° c) 70°
d) 45° e) 75°

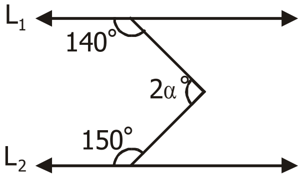
15. Si: $\overleftrightarrow{L_1}$ ■ $\overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x".



a) 40° b) 45° c) 60°
d) 50° e) 65°

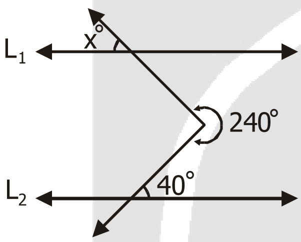
Autoevaluación

1. Calcular el valor de "α", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



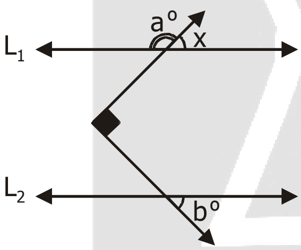
a) 70° b) 45° c) 35°
d) 60° e) 30°

2. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x".



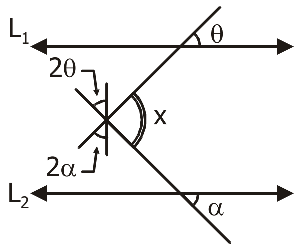
a) 65° b) 45° c) 70°
d) 60° e) 80°

3. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $a^\circ + b^\circ = 160^\circ$, calcular "x".



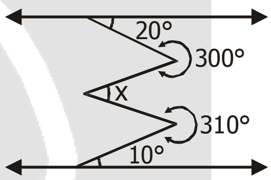
a) 50° b) 55° c) 45°
d) 60° e) 61°

4. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x".



a) 60° b) 50° c) 45°
d) 40° e) 65°

5. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular "x".



a) 85° b) 75° c) 70°
d) 80° e) 90°

Claves

1. c	2. e	3. b	4. a	5. d