

# Conteo de números



## La progresión más antigua

El problema de progresiones más antiguo no es el de la recompensa al inventor del ajedrez; que tiene ya más de dos mil años, sino otro mucho más viejo, "repartición del pan", registrado en el célebre papiro de Rind. Este papiro, hallado por Rind a fines del siglo pasado, fue escrito unos 2 000 años antes de nuestra era y constituye una copia de otra obra matemática aún más remota que data seguramente del tercer milenio antes de nuestra era. Entre los problemas aritméticos, algebraicos y geométricos que figuraban en dicho documento aparece el siguiente que se transmite en traducción libre:

Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera, y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron la séptima parte de las tres restantes, ¿cuánto correspondió a cada una?

### Solución:

Es evidente que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética creciente.

Suponiendo que el primer miembro sea "a" y la diferencia "r":

Parte de la primera	.....	a
Parte de la segunda	.....	a + r
Parte de la tercera	.....	a + 2r
Parte de la cuarta	.....	a + 3r
Parte de la quinta	.....	a + 4r

De acuerdo con los datos del problema:

$$a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r) = 100$$

$$a + (a + r) = \frac{(a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r)}{7}$$

Después de su simplificación, la primera ecuación, será:  
 $a + 2r = 20$

y la segunda:

$$11a = 2r$$

Al resolver este sistema resultará:

$$a = 1\frac{2}{3} ; r = 9\frac{1}{6}$$

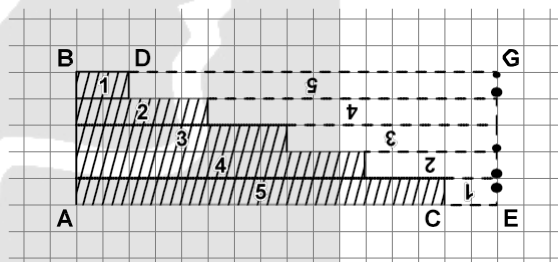
Por consiguiente el trigo debe ser repartido en las siguientes proporciones:

$$1\frac{2}{3} ; 10\frac{5}{6} ; 20 ; 29\frac{1}{6} ; 38\frac{1}{3}$$

## Aritmética en papel cuadriculado

A pesar de que este problema de progresión tiene ya 50 siglos de antigüedad, en la práctica escolar, la progresión apareció hace relativamente poco tiempo. Aunque en el Manual de Magnitski, publicado hace doscientos años empleado en Rusia durante medio siglo como texto en las escuelas, se trata de progresiones, no se dan fórmulas generales que ligen las magnitudes que figuran en las mismas. Por esa razón, el propio autor sale airoso de esos problemas solo a costa de grandes esfuerzos. Y, sin embargo, la fórmula de la suma de los términos de la progresión aritmética puede deducirse de un modo sencillo y gráfico empleando para ello el papel cuadriculado. En este, cualquier progresión aritmética puede expresarse con una figura escalonada. Por ejemplo, la figura ABCD de la figura representa la progresión:

2; 5; 8; 11; 14



Para determinar la suma de los términos completamos el diseño hasta formar el rectángulo ABGE y obtendremos dos figuras iguales: ABDE y DGCE. La superficie de cada una representa la suma de los términos de nuestra progresión. De ahí que la doble suma de los términos es igual a la superficie del rectángulo ABGE, es decir:

$$AC + CE = AB$$

Pero: AC + CE representa la suma de los términos primero y quinto de la progresión; "AB" representa el número de términos de la progresión, por eso el duplo de la suma:

$$2S = (\text{suma del primero y el último}) (\text{número de términos})$$

o también:

$$S = \frac{(\text{primer término} + \text{último término})(\# \text{ términos})}{2}$$

### Ejercicio 1:

En cada una de las progresiones aritméticas siguientes, calcular el término que se indica

- \* 9; 17; 25; 33; ...  $t_{42} = ??$
- \* 4; 16; 28; 40; ...  $t_{26} = ??$
- \* 5; 18; 31; 44; ...  $t_{73} = ??$
- \* 2; 13; 24; 35; ...  $t_{23} = ??$

### Ejercicio 2:

¿Cuántos términos tiene cada una de las siguientes progresiones aritméticas?

- \* 12; 27; 42; ... ; 447
- \* 4; 11; 18; ... ; 634
- \* 13; 30; 47; ... ; 676
- \* 5; 13; 21; ... ; 1605

## Progresión Aritmética (P.A.)

Es un conjunto de números, ordenados de tal manera que la diferencia entre dos términos consecutivos es una cantidad constante llamada RAZÓN ARITMÉTICA.

Ejemplos :

- i.  $\underbrace{15}_4; \underbrace{19}_4; \underbrace{23}_4; \underbrace{27}_4; \dots$  → Razón = 4
- ii.  $\underbrace{274}_{-3}; \underbrace{271}_{-3}; \underbrace{268}_{-3}; \underbrace{265}_{-3}; \dots$  → Razón = -3

Nota:

- Si la razón es positiva, la progresión es CRECIENTE.
- Si la razón es negativa, la progresión es DECRECIENTE.

### 1. Cálculo de un término cualquiera

Toda progresión aritmética, se podría representar por:

$$\underbrace{t_1}_r; \underbrace{t_2}_r; \underbrace{t_3}_r; \underbrace{t_4}_r; \dots; \underbrace{t_k}_r; \dots; \underbrace{t_n}_r$$

Donde :

$t_1$  = Primer término  
 $t_2$  = Segundo término

⋮

⋮

⋮

$t_k$  = Término de lugar "k"

⋮

⋮

$t_n$  = Término de lugar "n"

r = Razón aritmética

\* **Fórmula para calcular el término de lugar "n":**

$$t_n = t_1 + (n-1) \cdot r$$

\* Ejemplos:

i. Hallar el término de lugar 40 en la progresión aritmética:

$$17; 20; 23; 26; \dots$$

Solución:

Reconociendo términos observamos que:

$$t_1 = 17$$

$$r = 20 - 17 = 3$$

$$n = 40 \text{ [lugar 40]}$$

$$\rightarrow t_{40} = t_1 + (40 - 1)r$$

$$t_{40} = 17 + (39)(3) = 134$$

ii. Hallar el vigésimo quinto término en la progresión aritmética:

$$624; 619; 614; \dots$$

Solución:

Reconociendo términos observamos que:

$$t_1 = 624$$

$$r = 619 - 624 = -5$$

$$n = 25 \text{ [lugar 25]}$$

$$\rightarrow t_{25} = t_1 + (25 - 1)r$$

$$t_{25} = 624 + (24)(-5) = 504$$

### 2. Cálculo del número de términos

Dada una progresión aritmética finita, el número de términos se puede calcular:

$$\text{Nº de términos} = \frac{\text{último} - \text{anterior al primero}}{\text{Razón}}$$

o también :

$$\text{Nº de términos} = \frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{Razón}} + 1$$

Ambas fórmulas nos dan el mismo resultado.

\* Ejemplo:

¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión:

$$34; 38; 42; \dots; 162 ?$$

Solución:

$$t_1 = \text{primero} = 34$$

$$r = \text{razón} = 38 - 34 = 4$$

$$t_0 = \text{anterior al primero} = 34 - 4 = 30$$

$$t_n = \text{último término} = 162$$

$$n = \text{número de términos}$$

$$\rightarrow n = \frac{162 - 30}{4} = 33 \text{ términos}$$

### 3. Números consecutivos

El número de términos de una progresión de números consecutivos será:

$$\text{N}^\circ \text{ de términos} = \text{último} - \text{anterior al primero}$$

\* Ejemplo:

Hallar el número de términos en:  
73; 74; 75; .....; 181

$$\rightarrow n = 181 - 72 = 109 \text{ términos}$$

↙ anterior al primero

### Cantidad de cifras de una PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Para determinar cuántas cifras se emplean al escribir una progresión se debe formar grupos con la misma cantidad de cifras. (Ejemplo: números de 2 cifras, números de 3 cifras, etc.) Luego calcular la cantidad de cifras de cada grupo y sumar los resultados.

\* Ejemplo :

¿Cuántas cifras se emplearon al escribir la siguiente progresión aritmética:

36; 37; 38; .....; 475; 476?

Solución:

Separamos en dos grupos :

2 cifras c/u  $\rightarrow$  36; 37; 38; .....; 99

$$\rightarrow n = 99 - 35 = 64 \text{ términos}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de cifras} = 64 \times 2 = 128 \text{ cifras..... } \textcircled{1}$$

↙ cada número tiene 2 cifras

3 cifras c/u  $\rightarrow$  100; 101; 102; .....; 476

$$\rightarrow n = 476 - 99 = 377 \text{ términos}$$

↙ anterior al primero

$$\text{N}^\circ \text{ de cifras} = 377 \times 3 = 1131 \text{ cifras..... } \textcircled{2}$$

↙ # cifras de c/u

Luego el total de cifras:

De (1) y (2)

$$\text{Total cifras} = 128 + 1131$$

$$\text{Total cifras} = 1259$$

### Problemas para la clase

#### Bloque I

- ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética: 12; 16; 20; ... ; 348?
  - 82
  - 85
  - 86
  - 88
  - 90
- Hallar la suma de cifras del término vigésimo sexto de la siguiente progresión aritmética: 75; 81; 87; .....
  - 7
  - 8
  - 9
  - 10
  - 12
- Calcular la diferencia de los términos de lugar 48 y 31 de la siguiente progresión aritmética:  $m; m + 9; m + 18; \dots$ 
  - 132
  - 148
  - 175
  - 153
  - 108
- Si un libro tiene 1 472 páginas, ¿cuántas cifras se han empleado en la numeración de todas las páginas?
  - 2 732
  - 5 781
  - 4 781
  - 4 172
  - 3 218
- Si la siguiente progresión aritmética tiene 73 términos, hallar el término de lugar 51. .... ; 280; 283
  - 102
  - 111
  - 75
  - 98
  - 217
- ¿Cuántas cifras se emplearán al escribir todos los números impares de 3 cifras menores que 439?
  - 507
  - 316
  - 521
  - 475
  - 481
- En la escritura de los números de una rifa se imprimió: 0001; 0002, 0003; ..... ; 1 500 ¿Cuántos ceros inútiles se han escrito?
  - 2 889
  - 2 907
  - 1 205
  - 948
  - 1 107
- En una progresión aritmética de 48 términos, el primer término es 39 y el último 227. Hallar el término de lugar 18.
  - 175
  - 92
  - 75
  - 115
  - 107
- Un libro tiene 1 400 páginas. Un alumno travieso se puso a arrancar todas las páginas que terminan en la cifra 7. ¿Cuántas hojas quedaron?

- a) 1 260      b) 560      c) 720  
d) 1 120      e) 775

10. Al escribir la progresión aritmética:

41; 44; 47; ..... ; 572

¿Cuántas cifras se han empleado?

- a) 514      b) 712      c) 614  
d) 318      e) 472

### Bloque II

1. Si una progresión aritmética tiene 42 términos siendo el primero 36 y el último 241. ¿Cuál es el noveno término?

- a) 82      b) 76      c) 71  
d) 81      e) 91

2. ¿Cuántas cifras se emplearán al escribir la siguiente progresión aritmética:

43; 48; 53; ..... (120 términos)?

- a) 215      b) 360      c) 276  
d) 348      e) 312

3. Si al numerar un libro de  $\overline{abc}$  páginas se han empleado  $2.\overline{abc}$  cifras. Hallar: "a + b + c".

- a) 8      b) 9      c) 10  
d) 11      e) 12

4. Al numerar un libro se han empleado 2 148 cifras. ¿Cuántas cifras se han empleado al numerar la primera cuarta parte del libro?

- a) 537      b) 418      c) 456  
d) 712      e) 318

5. La diferencia de los términos de lugares 36 y 15 de una progresión aritmética es 126. Si el término de lugar 24 es 176, ¿cuál es el término de lugar 75?

- a) 482      b) 415      c) 317  
d) 372      e) 432

6. Si se escriben todos los numerales del sistema decimal que terminan en la cifra 4 a partir del 54, ¿hasta qué numeral se llegó, si se emplearon 654 cifras?

- a) 2 014      b) 1 734      c) 1 934  
d) 2 004      e) 2 174

7. Para escribir la siguiente sucesión se emplearon 2 622 cifras. Hallar "a + b + c".

$1^1 ; 2^2 ; 3^3 ; 4^4 ; \dots ; \overline{abc}^{\overline{abc}}$

- a) 12      b) 14      c) 15  
d) 9      e) 17

8. ¿Cuántos términos hay en la siguiente progresión aritmética:

$24_{(n)} ; 27_{(n)} ; 32_{(n)} ; \dots ; 255_{(n)} ?$

- a) 34      b) 32      c) 40  
d) 48      e) 52

9. ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética:

$\overline{mm}4 ; \overline{mm}7 ; \dots ; \overline{(m+6)(m+3)}7 ?$

- a) 112      b) 121      c) 214  
d) 168      e) 212

10. De un libro de 420 páginas se arrancaron cierta cantidad de páginas del inicio, notándose que en las páginas que quedan se han empleado 993 cifras en su numeración, ¿cuántas hojas se arrancaron?

- a) 54      b) 52      c) 48  
d) 42      e) 36

### Bloque III

1. ¿Cuántas cifras se emplearán al escribir todos los números de 3 cifras de la siguiente progresión aritmética:

22; 28; 34; ..... ?

- a) 420      b) 450      c) 480  
d) 540      e) 600

2. ¿Cuántas cifras se emplearán al escribir la siguiente secuencia de números:

$152^{12} ; 152^{15} ; 152^{18} ; \dots ; 152^{207} ?$

- a) 372      b) 408      c) 278  
d) 168      e) 366

3. El primer y último término de una progresión aritmética son  $\overline{mm}$  y  $\overline{3(m+1)2}$  respectivamente. Si la razón es "m" y el número de términos es 78, hallar el término trigésimo segundo.

- a) 172      b) 168      c) 152  
d) 144      e) 216

4. ¿Cuántos numerales del sistema decimal se representan con 3 cifras tanto en base 6, como en base 9?

- a) 125      b) 135      c) 144  
d) 152      e) 172

5. Al numerar un libro se han emplearon 714 cifras. ¿Cuántas cifras más se hubieran empleado si la numeración se hubiera realizado en la base 7?

- a) 48      b) 52      c) 75  
d) 54      e) 45

6. En una progresión aritmética el número de términos comprendidos entre 25 y 109 es el doble de los comprendidos entre 73 y 117. Hallar la razón de la progresión.

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 4                      e) 5

7. Al numerar un libro de 480 páginas se observó que las primeras páginas, que son la introducción, no se numeraron y en las páginas restantes se emplearon 1 277 cifras. ¿En qué página empezó la numeración del libro?

- a) 36                      b) 33                      c) 38  
d) 41                      e) 43

8. En la numeración de las últimas 40 páginas de un libro se han empleado 132 cifras. ¿Cuántas páginas del libro terminan en la cifra 3?

- a) 100                      b) 101                      c) 92  
d) 96                      e) 120

9. Sabiendo que los tres primeros términos de una progresión aritmética son:  $4n$ ;  $n^2 + 8$ ;  $8n - 2$ . Hallar el total de cifras empleadas en su escritura sabiendo que la progresión posee 35 términos.

- a) 88                      b) 72                      c) 48  
d) 92                      e) 102

10. ¿Cuántas cifras "7" se han empleado al escribir la serie de los números naturales desde 42 hasta 1243?

- a) 316                      b) 339                      c) 415  
d) 420                      e) 318



