

Proporcionalidad



¿Qué es una magnitud?

Si hacemos esta pregunta al profesor de física, seguramente nos dirá: «es todo aquello que se puede medir» y esto es cierto, la longitud se mide en metros, el volumen se mide en litros, la temperatura se mide en grados, la presión se mide en atmósferas, etc. Sin embargo, para nuestro estudio preferimos una definición equivalente:

Llamamos magnitud a todo aquello que es susceptible de aumento o de disminución.

Lo cual también es cierto: La longitud puede aumentar o disminuir, el volumen puede aumentar o disminuir, la temperatura (lo vemos día a día) puede aumentar o disminuir, la presión puede aumentar o disminuir, etc.

Matemática para físicos

Observemos que están haciendo los alumnos de 4to año en el laboratorio.

María Iriarte, Carlos Lira y Sheyla León han dispuesto su mesa de trabajo como vemos en la figura.

Han suspendido un resorte en uno de cuyos extremos cuelga un platillo del cual sale un indicador que, cuando el platillo está sin carga, señala el cero en una escala.



Oigamos lo que dicen:

- Elijamos como unidad una moneda de S/.0.50
- Sí, las otras son muy livianas -dijo Sheyla, al mismo tiempo que colocaba una moneda dentro del platillo.

Carlos se acerca a la regla y lee:

- Alargamiento: seis milímetros

(Todos anotan el resultado. Sheyla coloca una segunda moneda).

- Doce milímetros -lee esta vez María

(Repiten la operación agregando una moneda cada vez, leyendo el alargamiento y anotando el resultado)

Veamos como ordenó Carlos sus anotaciones:

Pesada número	Número de monedas	Alargamiento en mm
1	1	6
2	2	12
3	3	18
4	4	24
5	5	30
6	6	36

María comenta:

- El alargamiento es proporcional al peso.

Sheyla agrega:

- ¡Sí!, el coeficiente de proporcionalidad es 6. Es la función:
 $f_{(x)} = 6x$

Matemática para matemáticos

Como ya hemos dicho la matemática busca siempre generalizar los resultados. Basándonos en el párrafo anterior, consideremos la familia de funciones de la forma:
 $f_{(x)} = Kx$

Diremos que:

Una función "f" establece una correspondencia directamente proporcional si y sólo si para todo "x" perteneciente al dominio se verifica que: $f_{(x)} = Kx$

El número "K" se denomina constante de proporcionalidad.

Ejemplo: Si "f" está dada por la tabla:

0	0	$f_{(x)} = 10x$
1/5	2	
1/2	5	
1	10	
2	20	
3	30	

La constante de proporcionalidad es 10.

Espiemos otro poco en el laboratorio de física

Recordemos que para 5 monedas el alargamiento era 30 mm, para 6 monedas fue de 36 mm ... Sheyla agregó una moneda y Carlos dijo sin mirar la regla:

- ¡Ya sé! alargamiento , 42 mm

Pero María dijo sorprendida:

- ¡No! 40 mm. Los tres miraron la regla una y otra vez, un tanto confundidos.
- ¿Será una moneda falsa?

Cambiaron la última moneda por otra, pero el resultado fue el mismo.

Carlos agregó otra moneda y leyó 42 mm.

Asombrados fueron completando el siguiente cuadro:

Pesada número	Número de monedas	Alargamiento en mm
1	1	6
2	2	12
3	3	18
4	4	24
5	5	30
6	6	36
7	7	40
8	8	42
9	9	43
10	10	43
11	11	44
12	12	44
13	13	44
14	14	45
15	15	45

- ¡Qué raro!

Consultaron entonces al profesor que les dijo:

- Las leyes de proporcionalidad, en general, solamente se verifican dentro de ciertos límites. Esto deben tenerlo en cuenta siempre que resuelvan problemas. Todos ustedes saben muy bien que no es cierto que si 100 obreros hacen un edificio en 200 días, entonces 10 000 obreros tardarán dos días.
- Se chocarían entre ellos -murmuró Carlos.
- No se podría dar un paso -dijo Sheyla.

Correspondencia inversamente proporcional

Se dice que "f" establece una correspondencia inversamente proporcional si y sólo si: $f(x) = \frac{K}{x}$ para: $x \neq 0$ y $K \neq 0$.

"K" se denomina constante de proporcionalidad.

Ejemplo:

Si "f" está dada por la tabla:

0,5		8
1		4
2		2
3		4/3
4		1

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

La constante de proporcionalidad es 4.

• Lectura de fórmulas

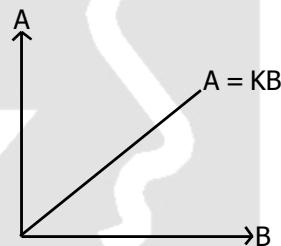
Según lo que hemos visto:

$$A = KB$$

Podemos leer: "A es proporcional a B" o

"A y B son directamente proporcionales"

- * "K" es una constante llamada constante de proporcionalidad o coeficiente de proporcionalidad.
- * La representación gráfica es un conjunto de puntos alineados con el origen.

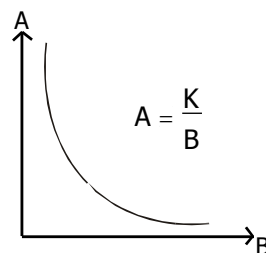


$$A = \frac{K}{B}$$

Podemos leer "A es inversamente

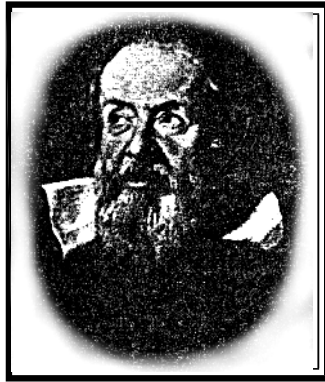
proporcional a B" o "A y B son inversamente proporcionales"

- * "K" es la constante de proporcionalidad.
- * La representación gráfica es una hipérbola.



Las constantes de proporcionalidad, los gráficos y los científicos

Así como en matemática estudiamos ciertas leyes que ligan a números o figuras, los físicos, economistas, biólogos, químicos, psicólogos, investigan las leyes que vinculan los fenómenos de los que tratan sus respectivas disciplinas.



Una de las diferencias fundamentales estriba en que el matemático tiene cierta libertad para estipular las reglas de juego, mientras que los demás científicos tienen por tarea descubrir las leyes que rigen la naturaleza.

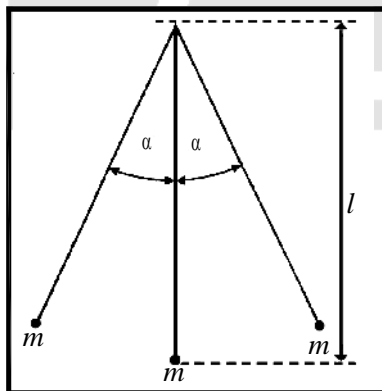
Decía Galileo (1564 - 1642): "La filosofía se halla escrita en el amplio libro que tenemos abierto para siempre ante nuestros ojos, me refiero al universo, pero no puede ser leído hasta que no hayamos aprendido el lenguaje y nos hayamos familiarizado con los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya mediación es humanamente imposible comprender ni una sola palabra".

Por ello que la necesidad de descubrir esas leyes obliga a los científicos a idear y realizar experiencias que les permita expresarlas mediante fórmulas matemáticas.

Estas experiencias hace que algunas de sus labores sean: observar, medir, confeccionar tablas, gráficos, diagramas ... ¡y saber mucha matemática!

Veamos un ejemplo:

Supongamos que un físico quiere estudiar el movimiento del péndulo. Observa, en primer lugar que el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa (ida y vuelta desde una de las posiciones extremas) es prácticamente el mismo para cada péndulo.



Se preguntará entonces: ¿no dependerá de la masa?. Aquí comienza su experimentación: cambiará el objeto que pende del péndulo por otro de distinta masa y medirá el tiempo que tarda para efectuar cada oscilación completa. Este tiempo se llama período y se indica con la letra "T".

Puede obtener una tabla como la siguiente:

masa	g	2	3	5	6	4
T	seg	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Evidentemente, el período "T" no depende de la masa "m". Podrá pensar luego que el período depende de la amplitud "α" (ángulo determinado por la vertical y la posición extrema). Nuevas mediciones, nuevas tablas le muestran que "T" tampoco depende de "α".

¿De qué dependerá? El péndulo consta de una masa «m» que pende de un hilo de longitud "l" y que oscila con una amplitud "α". Según las experiencias anteriores no depende ni de la amplitud ni de la masa "m", ¿dependerá de "l"?

A medir.

Si se duplica la longitud, el período aumenta, pero no al doble; si se triplica la longitud el período aumenta, pero no se triplica; cuando se multiplica a la longitud "l" por cuatro, el período se duplica. Podríamos obtener la tabla siguiente:

T	l	
0,5	4	
1,0	16	por 4
1,5	36	por 9
2,0	64	por 16

"T" no es proporcional a "l"

Todavía no podemos expresar el resultado mediante una fórmula. Sin embargo, seguramente "T" está relacionado de alguna forma con "l".

Aquí entra en juego otra vez el ingenio del científico y su conocimiento de la matemática. Quizá ya se te haya ocurrido una posibilidad.

Si multiplicamos a "T" por 2, "l" resulta multiplicada por $4 = 2^2$; si multiplicamos a "T" por 3, "l" queda multiplicada por $9 = 3^2$... Esto nos sugiere agregar una nueva columna a la tabla:

T	l	\sqrt{l}
0,5	4	2
1,0	16	4
1,5	36	6
2,0	64	8

Es decir: $T = K\sqrt{\ell}$. Con lo que conocemos, podríamos calcular «K». Como sabemos leer estas fórmulas, podemos enunciar la ley:

En cada lugar el período de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.

Problemas para la clase

Bloque I

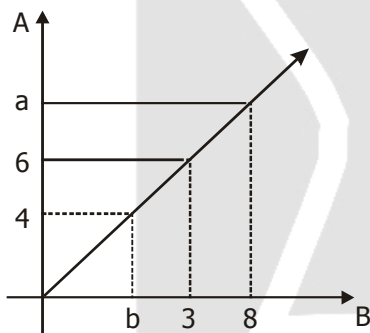
1. Si "A" es directamente proporcional a "B", completa el siguiente cuadro.

MAGNITUD "A"	16	32	8		20	
MAGNITUD "B"	4			12		7

2. Si "P" es inversamente proporcional a "Q", completa el siguiente cuadro.

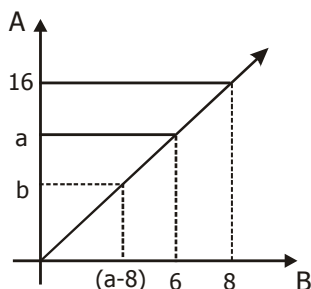
MAGNITUD "P"	10	5	20			15
MAGNITUD "Q"	6			30	2	

3. Si "A" y "B" son magnitudes proporcionales representadas mediante el siguiente gráfico:



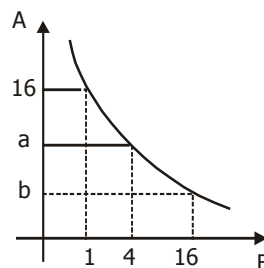
Calcular "a + b"

4. Si "A" y "B" son magnitudes proporcionales representadas mediante el siguiente gráfico:



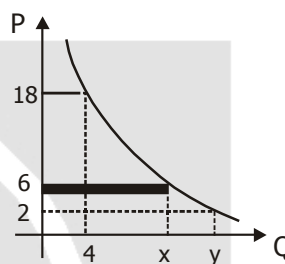
Calcular "a + b"

5. Si "A" y "B" son magnitudes proporcionales representadas mediante el siguiente gráfico:



Calcular "a + b"

6. Si "P" y "Q" son magnitudes proporcionales representadas mediante el siguiente gráfico:



Hallar "y - x"

7. Si "A" es D.P. a \sqrt{B} y cuando $A = 6$; $B = 4$, ¿cuánto valdrá "A", cuando $B = 9$?

- a) 6
- b) 3
- c) 9
- d) 18
- e) $\frac{9}{2}$

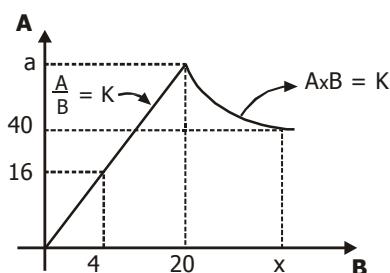
8. Si "A" es D.P. a B^4 y cuando $A = 48$; $B = 2$; calcular "A", cuando $B = 3$.

- a) 27
- b) 9
- c) 81
- d) 162
- e) 243

9. "P" varía inversamente proporcional a "T", cuando $P = 125$, entonces $T = 48$. Hallar "T", cuando $P = 300$.

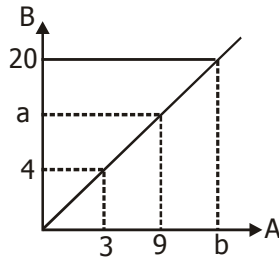
- a) 25
- b) 20
- c) 30
- d) 40
- e) 45

10. Si "A" y "B" son magnitudes proporcionales representados mediante el siguiente gráfico. Hallar "x"



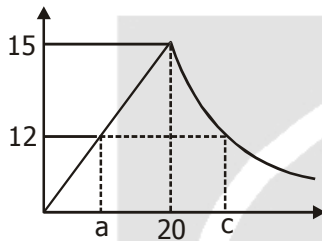
Bloque II

1. Del gráfico, hallar "a + b"



- a) 30 b) 12 c) 28
d) 27 e) 35

2. Del gráfico; calcule "a + c"



- a) 27 b) 32 c) 41
d) 18 e) 20

3. "x" varía en razón directa a "y" e inversa al cuadrado de "z". Cuando: $x=10$, entonces $y = 4$, $z = 14$. Hallar "x", cuando: $y = 16$ y $z = 7$.

- a) 180 b) 160 c) 154
d) 140 e) 120

4. Se sabe que "A" es D.P. a \sqrt{B} e I.P. a \sqrt{C} . Además cuando "A" es 14 entonces: $B = 64$ y $C = B$. Hallar "A", cuando "B" sea 4 y "C" sea el doble de "B".

- a) 7 b) 2 c) 4
d) 5 e) 6

5. Se tienen tres magnitudes "A", "B" y "C" tales que "A" es D.P. a "C" e I.P. a \sqrt{B} . Hallar "A", cuando: $B = C^2$, sabiendo que: $A = 10$ entonces: $B = 144$ y $C = 15$.

- a) 4 b) 8 c) 12
d) 16 e) 15

6. Sabiendo que "A" es D.P. a "B²" y que las variaciones de las magnitudes "A" y "B" se muestran en el siguiente cuadro. Hallar "a + d".

A	27	75	d	192
B	a	5	4	8

- a) 48 b) 51 c) 50
d) 47 e) 54

7. La velocidad del sonido en el aire es D.P. a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Si a 16°C la velocidad del sonido en el aire es de 340m/s , ¿cuál será la velocidad del sonido en el aire cuando la temperatura sea de 88°C ?

- a) 380m/s b) 350 c) 300
d) 180 e) 220

8. En una empresa el sueldo es D.P. a la edad y a los años de servicio del empleado e I.P. al cuadrado de la categoría. Juan empleado de 2da categoría con 10 años de servicio en la empresa y de 56 años de edad gana $\text{S}/2\,000$, José que entró a la empresa 3 años después que Juan, gana $\text{S}/.500$ y es empleado de 3ra categoría. Hallar la diferencia de edades de ambos.

- a) 8 b) 7 c) 11
d) 9 e) N.A.

9. El precio de impresión de un libro es directamente proporcional al número de páginas e inversamente proporcional al número de ejemplares que se impriman. Se editaron 2 000 ejemplares de un libro de 400 páginas y cuesta \$6 el ejemplar, ¿cuánto costará editar un ejemplar si se mandaron a imprimir 1 800 libros de 360 páginas?

- a) \$6 b) 8 c) 4
d) 7 e) 5

10. El precio de una casa es directamente proporcional al área e inversamente proporcional a la distancia que lo separa de Lima. Si una casa ubicada a 75km cuesta $\text{S}/.45\,000$, ¿cuánto costará una casa del mismo material, si su área es el doble y se encuentra a 150km de distancia?

- a) $\text{S}/.45\,000$ b) 22 500 c) 11 250
d) 90 000 e) 180 000

Bloque III

1. Se sabe que $(x + 2)$ varía proporcionalmente con $(y - 3)$. Si cuando: $x = 10$, entonces: $y = 19$, hallar el valor de "x", si: $y = 31$.

- a) 21 b) 23 c) 20
d) 19 e) 18

2. El sueldo de un empleado es proporcional al cuadrado de la edad que tiene. Si actualmente tiene 18 años, ¿dentro de cuántos años cuadruplicará su sueldo?

- a) 20 b) 25 c) 36
d) 18 e) 10

3. La ley de Boyle dice que: «La presión que soporta un gas es I. P. al volumen que ocupa; manteniendo la temperatura constante». Si la presión disminuye en 6

atmósferas, el volumen varía en $\frac{1}{5}$ de su valor. Hallar la presión a que está sometido dicho gas (en atmósferas).

- a) 30 b) 42 c) 24
d) 54 e) 36

4. El área cubierta por la pintura es proporcional al número de galones de pintura que se compra. Si para pintar 200 m^2 se necesitan 25 galones, ¿qué área se pintará con 15 galones?

- a) 80 m^2 b) 100 c) 120
d) 150 e) 180

6. El sueldo de un empleado es directamente proporcional a su rendimiento e inversamente proporcional al número de días que ha faltado a trabajar. Si Juan tuvo un sueldo mensual de S/.600 y su rendimiento es como 5 y faltó 4 días, entonces, ¿cuál es el sueldo de Carlos, si su rendimiento es como 8 y faltó 3 días?

- a) S/.960 b) 1 080 c) 1 280
d) 1 440 e) 980

5. La eficiencia de un trabajo se mide en puntos y es D.P. a los años de trabajo e I.P. a la raíz cuadrada de la edad del trabajador. La eficiencia de Raúl es 2 puntos cuando tiene un año de trabajo y 25 años de edad. ¿Cuál será su eficiencia a los 36 años?

- a) 18 pto b) 25 c) 28
d) 20 e) 22

7. El precio de un televisor a color varía en forma D.P. al cuadrado de su tamaño e I.P. a la raíz cuadrada de la

energía que consume. Si cuando su tamaño es de 14 pulgadas y consume «E» de energía, su precio es de \$360, ¿cuánto costará un televisor cuyo tamaño es de 21 pulgadas y consume $\frac{E}{4}$ de energía?

- a) \$520 b) 720 c) 640
d) 1 620 e) 3 240

8. Dos ruedas de 24 y 45 dientes están concatenadas. En el transcurso de 4 minutos una da 70 vueltas más que la otra. Hallar la velocidad menor en rev/min.

- a) 38,5 b) 20 c) 37,5
d) 12,5 e) 22,5

9. Se sabe que "A" es D.P. con "B" y que "B" es D.P. con "C". Si cuando "A" aumenta en 15 unidades "B" varía en 20%. ¿Qué pasa con "C" cuando "A" disminuye 50 unidades?

- a) Se duplica
b) Se reduce a la mitad
c) Se triplica
d) Se reduce a su tercera parte
e) N.A.

10. Si el precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso, ¿cuánto se ganará o perderá en un diamante que vale S/. 720 que se parte en dos pedazos, uno el doble del otro?.

- a) No se gana ni se pierde
b) Se gana S/.240
c) Se gana S/.320
d) Se pierde S/.240
e) Se pierde S/.320

