

Razones y Proporciones



Tengo un diccionario enciclopédico en casa, en el cual la palabra comparar se define así:

Comparar (del latín comparare): expresar las semejanzas o diferencias que se aprecian entre personas o cosas.

Ahora bien, cuando esto lo aplicamos a cantidades, la comparación recibe el nombre de **razón**.

* Por ejemplo, Lucía tiene 16 años y Reynaldo, su profesor, tiene 48 años. Si comparamos ambas edades, ¿qué podríamos decir?

1. Reynaldo tiene: $48 - 16 = 32$ años más que Lucía
2. Reynaldo tiene: $48 \div 16 = 3$ veces la edad de Lucía

En el primer caso se ha efectuado una comparación por resta y en el segundo caso una comparación por división.

La comparación por resta recibe el nombre de razón aritmética, mientras que la comparación por división se llama razón geométrica.

* Otro ejemplo:

Miguel tiene 24 bolas rojas y 16 bolas negras, luego utilizando las razones se tendrá:

1. Razón aritmética: $24 - 16 = 8$

"Miguel tiene 8 bolas rojas más que blancas"

2. Razón geométrica: $24 \div 16 = \frac{3}{2}$

"Miguel, por cada tres bolas rojas tiene dos bolas negras"

"El número de bolas rojas y el número de bolas negras están en relación de 3 a 2"

En consecuencia, dadas dos cantidades "A" y "B" se definen:

Razón aritmética: $A - B = r$

Razón geométrica: $\frac{A}{B} = k$

En ambos casos, la cantidad "A" recibe el nombre de **antecedente** y la cantidad "B" se llama **consecuente**.

* Ejercicio:

La suma de dos números es 144 y su razón geométrica vale $\frac{2}{7}$. ¿Cuáles son dichos números?

Resolución:

Sean los números "A" y "B", como su razón geométrica vale $\frac{2}{7}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{7} \rightarrow \begin{cases} A = 2k \\ B = 7k \end{cases}$$

Por dato:

$$\begin{aligned} A + B &= 144 \rightarrow 2k + 7k = 144 \\ 9k &= 144 \\ k &= 16 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} A &= 2(16) = 32 \\ B &= 7(16) = 112 \end{aligned}$$

• Proporción aritmética

Consideremos las siguientes razones aritméticas:

$$\begin{aligned} 24 - 14 &= 10 \\ 56 - 46 &= 10 \end{aligned}$$

Nótese que tienen diferentes antecedentes y diferentes consecuentes pero, eso sí el mismo valor, luego podemos expresar:

$$24 - 14 = 56 - 46$$

Esta última igualdad se llama proporción aritmética.

La unión de dos razones aritméticas que poseen el mismo valor se llama proporción aritmética.

En general:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= r \\ C - D &= r \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{A - B = C - D} \text{ Proporción aritmética}$$

Los números "A" y "D" se llaman **extremos**, mientras que "B" y "C" reciben el nombre de **medios**.

En la proporción aritmética: $32 - 18 = 40 - 26$ los términos medios, 18 y 40 son números diferentes, motivo por el cual ésta recibe el nombre de **proporción aritmética discreta** y se dice que 26 es la **cuarta diferencial** de 32; 18 y 40.

La proporción aritmética: $40 - 32 = 32 - 24$, en cambio, tiene sus términos medios iguales, se llama entonces **proporción aritmética continua**, mientras que 24 es la **tercera diferencial** de 40 y 32 y, 32 es la **media diferencial** de 40 y 24.

• Proporción geométrica

Si en lugar de razones aritméticas, usamos razones geométricas se tendrá una proporción geométrica.

La unión de dos razones geométricas de igual valor genera una proporción geométrica.

En general:

$$\frac{A}{B} = k$$

→

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Proporción geométrica

$$\frac{C}{D} = k$$

"A" y "D" son los extremos
"B" y "C" son los medios

Análogamente:

La proporción geométrica: $\frac{40}{8} = \frac{15}{3}$ es una **proporción**

geométrica discreta, pues sus términos medios son diferentes. Además 3 es la **cuarta proporcional** de 40; 15 y 8.

En cambio, la proporción geométrica: $\frac{18}{24} = \frac{24}{32}$ recibe el nombre de **proporción geométrica continua**, 32 es la **tercera proporcional** de 18 y 24, mientras que 24 es la **media proporcional** de 18 y 32.

• Serie de razones geométricas equivalentes

Para formar una proporción geométrica se reunía dos razones geométricas de igual valor, luego, si reunimos más razones geométricas se forma una serie de razones geométricas equivalentes.

La sucesión de varias (más de dos) razones geométricas recibe el nombre de serie de razones geométricas equivalentes.

Las razones geométricas: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ forman una serie de razones geométricas equivalentes cuando:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{b_1} = k \\ \frac{a_2}{b_2} = k \\ \frac{a_3}{b_3} = k \\ \vdots \\ \frac{a_n}{b_n} = k \end{array} \right\} \dots (a)$$

Se denota:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Donde: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son los antecedentes; $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ son los consecuentes y el valor común "k" se

llama **constante de proporcionalidad**.

Por ejemplo, las razones geométricas $\frac{25}{15}, \frac{40}{24}, \frac{55}{33}$ y $\frac{35}{21}$ forman una serie de razones geométricas equivalentes, pues todas ellas poseen el mismo

valor: $\frac{5}{3}$

Denotando: $\frac{25}{15} = \frac{40}{24} = \frac{55}{33} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$

En una serie de razones geométricas equivalentes todo antecedente es numéricamente igual al producto de su respectivo consecuente por la constante de proporcionalidad.

En las expresiones que se han denotado (a):

$$\begin{array}{l} a_1 = b_1 \cdot k \\ a_2 = b_2 \cdot k \\ a_3 = b_3 \cdot k \\ \vdots \\ a_n = b_n \cdot k \end{array}$$

En general: $a_i = b_i \cdot k \quad i \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$

Propiedades

1. En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que: «La razón geométrica entre la suma de sus antecedentes y la suma de sus consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad de dicha serie».

Es decir:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = k$$

2. En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que «La razón geométrica entre el producto de los antecedentes y el producto de los consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad elevada a un exponente igual al número de razones que conforman la serie».

Es decir:

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n} = k^n$$

Problemas para la clase

Bloque I

1. Las edades de Jorge y Viviana están en relación de 3 a 5 y la suma de ellas es 56. ¿Qué edad tiene Viviana?
- a) 34 años b) 35 c) 36
d) 38 e) 40
2. Tres números son entre sí como 5; 7 y 10. Si la suma de ellos es 220; hallar el mayor de los números.
- a) 85 b) 90 c) 95
d) 100 e) 120
3. Tres números "a", "b" y "c" que están en la relación de 4; 7 y 9 cumple la condición: $5a + 4b - 3c = 315$. Hallar "a + b + c"
- a) 200 b) 150 c) 280
d) 310 e) 300
4. En una proporción geométrica los extremos suman 75 y su diferencia es 15. Hallar el producto de los términos medios.
- a) 1 444 b) 1 296 c) 1 250
d) 1 300 e) 1 350
5. En una proporción geométrica continua, el producto de sus cuatro términos es 20 736. Calcular su media proporcional.
- a) 10 b) 16 c) 8
d) 12 e) 14
6. La razón geométrica de dos números es $\frac{2}{3}$ y el doble de su producto es 1 452. Hallar el mayor de ellos.
- a) 55 b) 33 c) 11
d) 22 e) 44
7. Hallar dos números enteros "a" y "b", sabiendo que son proporcionales a 2 y 3 respectivamente y que cumplen la siguiente condición: $a^2 + b^2 - ab = 2 268$. Dar como respuesta el mayor.
- a) 36 b) 54 c) 56
d) 34 e) 64
8. En la serie:
- $$\frac{a}{4} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = \frac{d}{5}$$
- la suma de los dos primeros antecedentes es 77. ¿Cuál es la suma de los dos últimos antecedentes?
- a) 98 b) 96 c) 100
d) 120 e) 112
9. En la serie: $\frac{a}{4} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{d}{9}$. Se cumple: $ab + cd = 3 600$. Calcular "a + b + c + d".
- a) 164 b) 168 c) 172
d) 192 e) 200
10. En la serie: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = 2$; además: $a + e = 34$. Hallar "a+b+c+d+e"
- a) 60 b) 64 c) 72
d) 62 e) 80

Bloque II

1. La suma de dos números es 3 564 y su razón $\frac{4}{7}$. Hallar los números.
- a) 1 296; 2 268 b) 1 375; 2 189
c) 1 396; 2 168 d) 1 250; 2 314
e) N.A.
2. Una persona gasta S/.600 en la compra de 3 artículos cuyos precios son: "a", "b" y "c" soles y son proporcionales respectivamente a 3; 4 y 5. El valor de "c - a" es:
- a) S/.60 b) 50 c) 180
d) 120 e) 100
3. En una proporción geométrica continua, la suma de los extremos es 75 y la diferencia de los mismos es 21. Calcular la media proporcional.
- a) 18 b) 24 c) 32
d) 30 e) 36
4. Se tiene una proporción geométrica continua donde los extremos son entre sí como 1 es a 25. Hallar el término medio de dicha proporción, sabiendo que la suma de los tres términos diferentes es 217.

- a) 21 b) 28 c) 35
d) 42 e) 45
5. El número de soles de "A" es al de "B" como 2 es a 3; el de "B" es al de "C" como 3 es a 4. ¿Cuántos soles tiene "C", si entre los tres juntos tienen 135 soles?
- a) 5/.20 b) 50 c) 30
d) 60 e) 40
6. Si: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$ y $b - a = 5$, hallar "c".
- a) 7 b) 21 c) 35
d) 25 e) N.A.
7. Si: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{d}{11}$ y $a + b + c = 75$
Hallar "d"
- a) 11 b) 55 c) 35
d) 75 e) N.A.
8. La suma de tres números es 14 250. El primero es al segundo como 11 a 3 y su diferencia es 600. ¿Cuánto es el doble del mayor por el menor?
- a) 2 970 000 b) 5 940 000
c) 4 860 000 d) 5 960 000
e) N.A.
9. En un nido de infantes, la relación entre el número de niños y niñas es de 4 a 3. Si después de 2 horas, 8 niños son recogidos por su mamá y a la vez llegan 5 niñas, entonces la nueva relación será de 2 a 7. ¿Cuántas niñas quedan en el nido?
- a) 9 b) 14 c) 12
d) 18 e) 10
10. En una urna se tienen 400 bolas, de las cuales 160 son blancas y las restantes negras. ¿Cuántas blancas se deben añadir para que por cada 2 bolas negras haya 3 bolas blancas?
- a) 200 b) 100 c) 0
d) 240 e) 120

Bloque III

1. En una proporción geométrica continua, el primer término es $\frac{1}{9}$ del cuarto término. Si la suma de los medios es 72, hallar la diferencia de los extremos.
- a) 60 b) 72 c) 84
d) 90 e) 96
2. La diferencia entre el mayor y el menor término de una proporción geométrica es 25. Si el otro término es 30,

hallar la suma de los términos, si dichos términos son enteros positivos.

- a) 95 b) 105 c) 115
d) 125 e) 135
3. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números 5; 3 y 16. Determinar la suma de dichos números.
- a) 30 b) 20 c) 45
d) 15 e) 12
4. Se tiene: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$. La suma de las tres razones es 18 y además:
 $Abc + Bac + Cab = 1\ 296$. Hallar "ABC"
- a) 432 b) 653 c) 768
d) 1 342 e) 15 552
5. Si: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$
y: $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = 4\ 900$
Hallar: $3(ab + bc + cd)$
- a) 70 b) 35 c) 210
d) 280 e) 120
6. El número de vagones que lleva un tren "A" es los $\frac{5}{11}$ del que lleva un tren "B"; y el que lleva el tren "C" es $\frac{7}{13}$ del que lleva el tren "D". Entre "A" y "B" llevan tantos vagones como los otros dos. ¿Cuál es el número de vagones de cada tren, sabiendo que ningún tren tiene más de 60 vagones?
- a) A=25; B=55; C=28; D=52
b) A=23; B=47; C=25; D=55
c) A=28; B=52; C=21; D=59
d) A=30; B=35; C=28; D=37
e) A=32; B=33; C=25; D=40
7. Un termómetro defectuoso indica 2° para el hielo al fundirse y 107° para el vapor de agua hirviendo. ¿Cuál es la temperatura real en $^\circ\text{C}$ cuando marca 23° ?
- a) 14°C
b) más de 20°C
c) menos de 14°C
d) entre 14° y 25°C
e) N.A.
8. En una competencia ciclística, "A" le ganó a "B" por 400m y "B" le gana a "C" por 100m. ¿Por cuántos metros le ganó "A" a "C", si el circuito tenía una longitud de 1 600 m?

- a) 500 m b) 425 c) 475
d) 575 e) 415

9. En una proporción continua, la suma de los extremos es 73 y la suma de los cuadrados de los extremos es 4 177. Determine la media proporcional.

- a) 18 b) 24 c) 28
d) 22 e) 32

10. En una serie de cuatro razones geométricas continuas e iguales, la suma del primer antecedente y del tercer consecuente es 336. Determinar la suma del primer consecuente con el último consecuente, si se sabe que la suma de las cuatro razones es $\frac{4}{3}$.

- a) 14 800 b) 1 240 c) 120
d) 1 008 e) N.A.



