Inecuaciones Cuadráticas

Inecuación cuadrática

Forma general:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c \gtrless 0\ ; \quad a \neq 0$$

Donde: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$

Del rectángulo se obtiene:

$$ax^2 + bx + c > 0;\ \ ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0;\ \ ax^2 + bx + c \leq 0$$

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Primer caso

Si: $\Delta > 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, es factorizable en el campo real, para resolver utilizaremos el método de los **puntos críticos.**

$$a(x - x_1)(x - x_2) \gtrless 0$$

P

1. Se factoriza el polinomio.
2. Hallar los dos puntos críticos, luego se ordenan en la recta real en forma creciente.
3. Es indispensable que el primer coeficiente de cada factor lineal sea positivo, por ello se colocan entre los puntos críticos los signos (+) y (-) alternadamente de derecha a izquierda; comenzando por el signo (+).
4. Si tenemos:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c < 0 \quad ó \quad P_{(x)} = ax^2 + bx + c \leq 0$$

El conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (-).

En forma análoga:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c > 0 \quad ó \quad P_{(x)} = ax^2 + bx + c \geq 0$$

El conjunto solución estará formado por el intervalo donde aparece el signo (+).

<u>Ejemplos</u>:

Intervalos	Factorizando	Puntos críticos	Graficando	Conjunto solución
$x^2 + x - 20 \leq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$5x^2 + x - 6 > 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$20x^2 - x - 1 < 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$6x^2 - 13x + 6 \geq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$ax^2+(a+1)x+1<0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$2x^2 + 9x + 9 \leq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$4x^2 + 7x + 3 \geq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$2x^2 - 7x + 3 < 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	

Segundo caso

Si: $\Delta = 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, se transforma a un trinomio cuadrado perfecto de la forma:

$$(mx + n)^2 \gtrless 0$$

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2 - 10x + 25 \gtrless 0$$

<u>Solución</u>:
Calculando la discriminante:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} \gtrless 0$$

$$(x - 5)^2 \gtrless 0$$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a. $(x - 5)^2 \geq 0$
se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\therefore$ C.S. = $\mathbb{R}$

b. $(x - 5)^2 > 0$
se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$; a excepción de:
$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$
$$\therefore \text{C.S.} = \mathbb{R} - \{5\}$$

c. $(x - 5)^2 < 0$
se observa una inecuación, la cual no se verifica para ningún valor de $x \in \mathbb{R}$.
$\therefore$ C.S. = ϕ

d. $(x - 5)^2 \leq 0$
la inecuación sólo se cumple si: $x - 5 = 0$
$\therefore$ C.S. = $\{5\}$

Inecuación	Trinomio cuadrado perfecto	Conjunto solución
$x^2 - 6x + 9 > 0$		
$x^2 - 6x + 9 \geq 0$		
$x^2 - 6x + 9 < 0$		
$x^2 - 6x + 9 \leq 0$		
$x^2 + 4x + 4 > 0$		
$x^2 + 4x + 4 \geq 0$		
$x^2 + 4x + 4 < 0$		
$x^2 + 4x + 4 \leq 0$		

Tercer caso

Si: $\Delta < 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, se transforma en un cuadrado perfecto más un cierto número real positivo, de la forma:

$$(mx + n)^2 + k \gtrless 0\ ; \quad k > 0$$

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2 + 2x + 6 \gtrless 0$$

<u>Solución</u>:
Calculando la discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4(6)(1)$$
$$\Delta = -20 < 0$$

Luego:

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} + 5 \gtrless 0$$

$$(x + 1)^2 + 5 \gtrless 0$$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a. $\underbrace{(x + 1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} > 0$
se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$$\therefore \text{C.S.} = \mathbb{R} = \langle -\infty; +\infty \rangle$$

b. $\underbrace{(x + 1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} \geq 0$
también se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$$\therefore \text{C.S.} = \mathbb{R} = \langle -\infty; +\infty \rangle$$

c. $\underbrace{(x + 1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} < 0$
nunca se verifica pues el primer miembro siempre es mayor que cero:
$$\therefore \text{C.S.} = \phi$$

d. $\underbrace{(x + 1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} \leq 0$
nunca se verifica:
$$\therefore \text{C.S.} = \phi$$

Inecuación	Completando cuadrados	Comentario - Se verifica $\forall\ x \in \mathbb{R}$ - Nunca se verifica	- C.S.=$\mathbb{R}$=$<-\infty;+\infty>$ - C.S.=ϕ
$x^2+2x+9>0$			
$4x^2-4x+6<0$			
$x^2+4x+12\geq 0$			
$x^2-6x+10\leq 0$			
$x^2-2x+7>0$			
$4x^2+4x+9<0$			
$x^2+6x+10\geq 0$			
$x^2+8x+20\leq 0$			
$4x^2-3x+1>0$			
$2x^2+x+2<0$			
$6x^2-3x+2\geq 0$			
$5x^2-2x+1\leq 0$			

Teorema del trinomio positivo

Si el polinomio:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c;\ \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$$

tiene discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) negativo y ($a > 0$), entonces:

$$ax^2 + bx + c > 0\ ;\quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

Hallar el menor de los números "M" que cumple la siguiente condición:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}: 4x - x^2 - 12 \leq M$$

Solución:

$$4x - x^2 - 12 \leq M$$

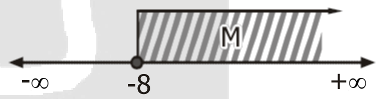
multiplicando a todos los términos de la desigualdada por (-1) se tiene:

$$x^2 - 4x + 12 \geq -M$$
$$x^2 - 4x + (M + 12) \geq 0$$

como se verifica $\forall\ x \in \mathbb{R}$ y el primer coeficiente es positivo ($1 > 0$), entonces el discriminante debe ser menor o igual a cero. Luego tenemos:

$$\Delta = 16 - 4(M + 12) \leq 0$$
$$16 - 4M - 48 \leq 0$$
$$-32 \leq 4M \leftrightarrow 4M \geq -32$$
$$M \geq -8$$

Graficando:



Del gráfico, el menor valor de "M" es -8.

Corolario

Si el polinomio:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c\ ;\quad \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$$

tiene discriminante: $\Delta < 0$; ($a < 0$), entonces:

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

➲ Problemas resueltos

1. Resolver:

$$x^2 - 11x + 28 > 0$$

Solución:

$$\Delta = (-11)^2 - 4(1)(28) = 9 > 0$$

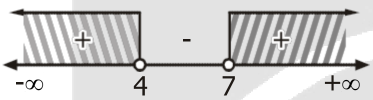
Como la discriminante es positiva podremos factorizar el trinomio:

$$(x - 4)(x - 7) > 0$$

igualando cada factor a cero:

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$
$$x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$$
$$P.C. = \{4; 7\}$$

Graficando los puntos críticos en la recta real y aplicando la regla de los signos se tendrá:



como:

$$(x - 4)(x - 7) > 0$$

elegimos las zonas de signo (+)

$$\therefore\ x \in \langle -\infty; 4\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$$

2. Resolver:

$$- x^2 - 2x + 8 \geq 0$$

Solución:

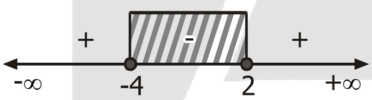
El primer coeficiente debe ser positivo, entonces multiplicamos por (-1) a los miembros de la desigualdad:

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0$$
$$\Delta = 2^2 - 4(1)(-8) = 36 > 0$$

Factorizando el trinomio se tendrá:

$$(x + 4)(x - 2) \leq 0$$
$$P.C. = \{-4; 2\}$$

Graficando:



Como:

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

el conjunto solución está en la zona negativa.

$$\therefore\ x \in [-4; 2]$$

3. Resolver:

$$3x^2 + 4x - 5 < 0$$

Solución:

$$3x^2 + 4x - 5 < 0$$
$$\Delta = 4^2 - 4(3)(-5) = 76 > 0$$

como el trinomio no es factorizable hacemos:

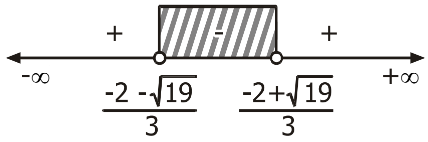
$$3x^2 + 4x - 5 = 0$$

de donde:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$$

Estos dos valores representan a los puntos críticos:



como:

$$3x^2 + 4x - 5 < 0$$

la solución está en la zona negativa.

$$\therefore\ x \in \left\langle \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{19}}{3} \right\rangle$$

4. Hallar el menor número "M" con la propiedad:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}:\ 1 + 6x - x^2 \leq M$$

Solución:

Trasponiendo:

$$x^2 - 6x + (M - 1) \geq 0;\quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Luego por propiedad, discriminante ≤ 0:

$$(-6)^2 - 4(M - 1) \leq 0 \leftrightarrow 9 - (M - 1) \leq 0$$
$$10 \leq M$$

$$\therefore\ M = 10$$

5. Si "x" es un número positivo, múltiplo de 17 que satisface las siguientes desigualdades:

$$0 < \frac{5(x^2 - 115x - 600)}{x(x + 5)} < 1$$

Hallar el valor de "x".

Solución:

$$0 < \frac{5(x - 120)(x + 5)}{x(x + 5)} < 1$$

$$0 < \frac{5x - 600}{x} < 1$$

$$0 < \frac{5x}{x} - \frac{600}{x} < 1$$

$$0 < 5 - \frac{600}{x} < 1 \rightarrow -5 < -\frac{600}{x} < -4$$

Dividamos a toda la desigualdad por (-600):

$$\frac{-5}{-600} > \frac{-600}{-600x} > \frac{-4}{-600}$$

$$\frac{1}{120} > \frac{1}{x} > \frac{1}{150}$$

Invirtiendo:

$$120 < x < 150$$

como "x" es $\overset{o}{17}$ $\quad\therefore\ x = 136$

Problemas para la clase

1. Resolver:

$$2x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

a) $[2; +\infty>$ b) $[-\frac{3}{2}; 2]$ c) $[\frac{3}{2}; 2]$
d) $<-\infty; 2]$ e) $<4; +\infty>$

2. Resolver:

$$3x^2 - 7x + 4 > 0$$

indicar un intervalo.

a) $<-\infty; 1>$ b) $<-\infty; \frac{3}{2}>$
c) $<-3; +\infty>$ d) $<-4; +\infty>$
e) $<\frac{1}{3}; 4>$

3. Resolver:

$$2x^2 - 3x - 9 < 0$$

e indicar la suma de valores enteros que la verifican.

a) 2 b) 3 c) 5
d) 6 e) 9

4. Resolver:

$$x^2 - 14x < -49$$

a) $x \in <-7; +\infty>$ b) $x \in <-\infty; -7>$
c) $x \in <7; +\infty>$ d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \phi$

5. De los siguientes enunciados, ¿cuántas son verdaderas?

I. $x^2 > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$
II. $(x - 1)^2 \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$
III. $(x + 3)^2 \leq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$
IV. $(2x - 3)^2 \leq 0 \rightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$
V. $x^2 \leq 0 \rightarrow x \leq 0$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

6. Resolver:

$$x^2 + 2x - 1 < 0$$

a) $<-\sqrt{2}; \sqrt{2}>$ b) $<-\sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} + 1>$
c) $<1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}>$ d) $<-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1>$
e) $<-2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}>$

7. Resolver:

$$x^2 + 10x + 27 \geq 0$$

a) $<-\infty; +\infty>$ b) $<-\infty; \sqrt{5} - \sqrt{3}>$
c) $<-3 - \sqrt{5}; +\infty>$ d) $<-3 + \sqrt{5}; +\infty>$
e) ϕ

8. Resolver:

$$x^2 + 10x + 27 \leq 0$$

a) $x \in \phi$ b) $x \in <-\infty; +\infty>$
c) $<-\infty; -2>$ d) $<-\sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} + 1>$
e) $<-\infty; -3>$

9. Resolver:

$$(5 + 2x)(3 - 4x) \geq 0$$

a) $x \in [-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}]$

b) $x \in <-\infty; -\frac{2}{5}] \cup [\frac{3}{4}; +\infty>$

c) $x \in [-\frac{5}{2}; \frac{3}{4}]$

d) $x \in <-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{3}{4}; +\infty>$

e) $x \in \mathbb{R}$

10. Resolver:

$$-2x^2 - x + 10 \leq 0$$

a) $x \in [-2; \frac{5}{2}]$

b) $x \in <-\infty; -3] \cup [\frac{5}{2}; +\infty>$

c) $x \in <-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [2; +\infty>$

d) $x \in [-\frac{5}{2}; 2]$

e) $x \in \mathbb{R}$

11. Resolver:

$$x^2 - 20x \leq -(25 + 3x^2)$$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

c) $x \in \phi$ d) $x \in \left\{\frac{5}{2}\right\}$

e) $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$

12. Hallar el mayor valor entero "m" tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$m \leq x^2 - 10x + 32$$

a) 5 b) 8 c) 6
d) 7 e) 10

13. Hallar el menor número entero "M" tal que para todo x $\in \mathbb{R}$, se cumpla:

$$-x^2 + 4x - 10 < M$$

a) -5 b) -3 c) -1
d) 1 e) 2

14. Resolver:

$$x^3 - 1 < (x - 1)^3$$

a) $x \in \langle 0; 1\rangle$ b) $x \in \langle -\infty; 1]$
c) $x \in [-1; 0]$ d) $x \in [-1; +\infty\rangle$
e) $x \in \langle -1; 1\rangle$

15. Resolver:

$$x(x + 4)(x + 6) + 16 \leq (x + 1)(x + 2)(x + 6)$$

a) $x \in \phi$ b) $x \in \{-2\}$
c) $x \in \langle -\infty; +\infty\rangle$ d) $x \in \langle 2; +\infty\rangle$
e) $x \in \{2\}$

16. Resolver:

$$(2x + 5)^2 \leq (5x + 2)^2$$

dar un intervalo solución.

a) $x \in \langle -\infty; 1\rangle$ b) $x \in [-1; +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -\infty; -1]$ d) $x \in \langle -\infty; +\infty\rangle$
e) $x \in [-1; 1]$

17. Resolver:

$$7x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

a) $x \in \left[\dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{14}; \dfrac{5 + 2\sqrt{7}}{14}\right]$

b) $x \in \left[\dfrac{-5 - 2\sqrt{7}}{14}; \dfrac{-5 + 2\sqrt{7}}{14}\right]$

c) $x \in [-2\cdot\sqrt{7}; 2\cdot\sqrt{7}]$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \phi$

18. Resolver:

$$(x - 1)^2 - x^2 \geq -(x - 2)^2$$

dar el conjunto no solución.

a) $x \in [1; 5]$ b) $x \in [5; +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -\infty; 1]$ d) $x \in \langle -\infty; 5]$
e) $x \in \langle 1; 5\rangle$

19. Indicar el mayor valor de "α", si:

$$x^2 + 10x + 31 \geq \alpha$$

se cumple $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) 4 b) 6 c) 7
d) 8 e) 25

20. Indicar el mayor número entero "m" que satisface la desigualdad:

$$2x^2 - 4x + 1 > 2m$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) 3 b) -2 c) 0
d) -1 e) 1

21. Resolver el sistema:

$$5x - 1 < x^2 + 2x + 1 < 7x - 3$$

a) $]-\infty; 2[$ b) $]4; +\infty[$ c) $]1; 5[$
d) $]-\infty; 2[\cup]-4; +\infty[$ e) $]2; 4[$

22. Cuántos valores verifican la siguiente inecuación:

$$\frac{x(2x - 28)}{98} \leq -1$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) infinitos

23. Cuántos valores enteros no negativos verifican:

$$4x^2 - 4x - 49 < 0$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

24. Al resolver:

$$(x - 2)(x + 1)(x - 3) > (x - 1)(x + 2)(x + 4)$$

se obtiene como conjunto solución: $x \in \langle\alpha; \beta\rangle$. Indique "$\alpha + \beta$".

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $-\dfrac{1}{9}$ c) -9

d) $\dfrac{1}{3}$ e) -3

25. Al resolver:

$$x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

se obtiene como conjunto solución: $x \in \mathbb{R} - \langle m; n\rangle$. Indique "m + n".

a) -5 b) -1 c) 2
d) 4 e) 5

26. Si la inecuación:

$$x^2 - mx + n < 0$$

presenta como conjunto solución: $x \in \langle 3; 5\rangle$. Hallar "2m + n".

a) 23 b) 18 c) 31
d) 15 e) 24

27. Si la inecuación:

$$-5x^2 + \lambda x + \alpha > 0$$

presenta como conjunto solución: $\langle -5; 5\rangle$, luego el valor de "$\lambda - \alpha$" es:

a) -125 b) 5 c) 10
d) 12 e) 25

28. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 4 < 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 6 > 0\}$$

Hallar "A ∩ B".

a) $x \in \phi$ b) $x \in \mathbb{R}$
c) $x \in \langle 2; +\infty\rangle$ d) $x \in \langle 2; 3\rangle$
e) $x \in \langle 1; 2\rangle \cup \langle 3; 4\rangle$

29. Si:

$$ax^2 + b + x < 0$$

se verifica $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ¿qué tipo de número es "b"?

a) cero b) positivo c) negativo
d) impar e) entero

30. Si:

$$m \in \langle a; b\rangle$$

tal que la expresión:

$$x^2 + 1 < 2x^2 + x + m < 3x^2 + 2$$

se verifica para cualquier tipo de valor para "x", encontrar el valor de:

$$4(a + b)$$

a) 32 b) $-8\sqrt{5}$ c) -16
d) $-16\sqrt{2}$ e) N.A.

Autoevaluación

1. Resolver:

$$x^2 - x - 12 \geq 0$$

a) $x \in \langle -\infty; -3] \cup [4; +\infty\rangle$
b) $x \in [-3; 4]$

2. Resolver:

$$x^2 - 13x + 30 < 0$$

a) $x \in \langle 3; +\infty\rangle$ b) $x \in \langle -\infty; 10\rangle$
c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x \in \phi$
e) $x \in \langle 3; 10\rangle$

3. Resolver:

$$x^2 + x - 1 \leq 0$$

a) $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ b) $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; 4\right]$

c) $x \in \phi$ d) $x \in \mathbb{R}$

e) $\left\langle -\infty; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

4. Resolver:

$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \phi$
c) $x \in \langle 4; +\infty\rangle$ d) $x \in \langle -\infty; 4]$
e) $x \in [-4; 4]$

5. Resolver:

$$-6x^2 - x + 2 \geq 0$$

a) $x \in \left\langle -\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ b) $x \in [-\infty; 1]$

$\left[\,2\,;\,1\,\right]$

c) $x \in [4; 6]$ e) $x \in \phi$ d) $x \in \mathbb{R}$
d) $x \in [-5; -3]$