

Sistemas de ecuaciones lineales



SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES

Es un conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde: **x** e **y** son las incógnitas; **a**, **b**, **c**, **d**, **e** y **f** son constantes.

¿Qué significa "resolver un sistema de ecuaciones"?

Significa hallar los valores de las incógnitas (generalmente "x" e "y") de tal manera que al reemplazarlas en las ecuaciones se verifica la igualdad.

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS

Existen muchos métodos para resolver SISTEMAS DE ECUACIONES, algunos más sencillos que otros. El día de hoy estudiaremos tres de ellos: de Reducción o Eliminación, de Igualación y de Sustitución.

1. Método de Reducción o Eliminación

En este método, el objetivo es eliminar una de las incógnitas sumando ambas ecuaciones.

* **Ejemplo:**

Resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y = 12 \dots \text{Ecuación \#1} \\ 4x - y = 3 \dots \text{Ecuación \#2} \end{cases}$

Solución:

Si sumamos ambas ecuaciones no se elimina ninguna incógnita, así que multipliquemos por 2 la ecuación #2:

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2[4x - y] = 2[3] \end{cases}$$

Este artificio es muy utilizado en la resolución de sistemas

Tenemos: $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$

Sumando: $9x = 18$

→ $x = 2$ Este valor será sustituido en cualquier ecuación

Así obtenemos: $y = 5$

2. Método de Igualación

Se despeja una misma variable en ambas ecuaciones, luego se igualan ambos resultados.

* **Ejemplo:**

Resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y = 12 \dots \text{Ecuación \#1} \\ 4x - y = 3 \dots \text{Ecuación \#2} \end{cases}$

Solución:

Despejando "y" en la ecuación #1:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ \rightarrow 2y &= 12 - x \\ \rightarrow y &= \frac{12 - x}{2} \end{aligned}$$

Despejando "y" en la ecuación #2:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ \rightarrow 4x &= 3 + y \\ \rightarrow 4x - 3 &= y \end{aligned}$$

Luego igualando ambos resultados: $\frac{12 - x}{2} = 4x - 3$

$$\begin{aligned} \rightarrow 12 - x &= 2(4x - 3) \\ \rightarrow 12 - x &= 8x - 6 \\ \rightarrow 12 + 6 &= 8x + x \\ 18 &= 9x \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de "x" en #1 ó en #2 tenemos:

$$\begin{aligned} 2 + 2y &= 12 \\ \rightarrow 2y &= 12 - 2 \\ y &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

3. Método de Sustitución

Es similar al método anterior, con la diferencia de que únicamente se despeja una variable en una ecuación, y este resultado es reemplazado en la otra ecuación.

* **Ejemplo:**

Resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y = 12 \dots \text{Ecuación \#1} \\ 4x - y = 3 \dots \text{Ecuación \#2} \end{cases}$

Solución:

De #1 despejamos a la incógnita "x": $x = 12 - 2y$

Este resultado lo reemplazamos en #2:

$$\begin{aligned} &\rightarrow 4(12 - 2y) - y = 3 \\ &\rightarrow 48 - 8y - y = 3 \\ &\rightarrow 48 - 3 = 8y + y \\ &\rightarrow 45 = 9y \\ &\rightarrow 5 = y \end{aligned}$$

Este valor se reemplaza en #1 ó en #2 y obtenemos el valor de "x":

$$\begin{aligned} x + 2(5) &= 12 \\ x &= 12 - 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Problemas para la clase

Bloque I

Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 8x - 2y = 7 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

8. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

9. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

10. $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ x - 3y = 11 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

11. $\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

12. $\begin{cases} 7x - 2y = 16 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

Rpta.: $x = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

Bloque II

1. Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 21 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

luego, calcular "xy"

- a) 3 b) 4 c) 5
d) -6 e) 6

2. Resolver:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$$

luego, indicar "x + y"

- a) 1 b) -1 c) 0
d) -2 e) 4

3. Resolver:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ \frac{3x + y}{2} = -1 \end{cases}$$

luego, indicar: $x^2 + y^2$

- a) 16 b) 18 c) 20
d) 22 e) 24

4. Resolver:

$$\begin{cases} 5x + y = 1,1 \\ 2x - 3y = 0,1 \end{cases}$$

luego, indicar el valor de "x"

- a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,5

5. Resolver:

$$\begin{cases} x - 8 = y \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

indicando " $\frac{y+2}{x}$ "

- a) 1 b) -1 c) 0
d) 2 e) -2

6. Resolver:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 3x + 5y = 33 \end{cases}$$

indicando "x + y"

- a) 3 b) 6 c) 9
d) 12 e) 15

7. Luego de resolver:

$$\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 3y + x = 11 \end{cases}$$

indicar "x - y"

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

8. Resolver:

$$\begin{cases} 4x + 3y = -14 \\ 4y - 3x = 23 \end{cases}$$

e indicar "x"

- a) 1 b) -1 c) 5
d) -5 e) 0

9. Resolver:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 16 - 2x \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

luego, indicar " $x^2 + y^2$ "

- a) -5 b) 3 c) 12
d) 13 e) 15

10. Resolver:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

e indicar "3x + 4y"

- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

Bloque III

1. Resolver:

$$\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

indicar "x + y"

- a) 9 b) 8 c) 7
d) 6 e) 5

2. Calcular el valor de "m" en el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

si: $x = 12$; es una de las soluciones del sistema.

- a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) 0

3. Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3(x + y) + 2(x - y) = 17 \\ 5(x + y) + 4(x - y) = 29 \end{cases}$$

señale el valor de: $3x + 4y - xy$

- a) 11 b) 9 c) 31
d) 7 e) 41

4. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4(2x + y) + 5(2x - y) = 17 \\ 3(2x + y) - (2x - y) = 8 \end{cases}$$

indicar el valor de " $x^2 - y^2$ "

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 9

5. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} \\ \frac{x+y}{4} = \frac{y+2}{3} \end{cases}$$

- a) $x = 5; y = 7$
- b) $x = 7; y = 5$
- c) $x = 2; y = 7$
- d) $x = 5; y = 2$
- e) $x = 0; y = 1$

6. Resolver:

$$\begin{cases} (y + 1)(x + 5) = (y + 5)(x + 1) \\ xy + y + x = (y + 2)(x + 2) \end{cases}$$

indicar "x - y"

- a) 4
- b) 3
- c) 2
- d) 1
- e) 0

7. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 4 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{15} = 3 \end{cases}$$

indicar: $\frac{x+1}{y}$

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

8. Si la siguiente tabla de valores satisface a: $y = 5x + a + b$, calcular "x", cuando: $y = 12$.

x	b	-1
y	2	2a

- a) 3
- b) 13
- c) 1/3
- d) 6
- e) 9

9. Conociendo el siguiente cuadro de valores:

x	3	7
y	5	11

que satisface la ecuación: $y = 2ax + b$, hallar "y", cuando $x = 1$

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

10. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{n+1}{10} = \frac{3m-5}{2} \\ \frac{n+1}{10} = \frac{n-m}{8} \end{cases}$$

hallar: $\frac{n}{m+16}$

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Autoevaluación

1. Dado el sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 13 \end{cases}$
hallar el valor de "y"

- a) 10
- b) -3
- c) 3
- d) 5
- e) 7

2. Si se tiene: $\begin{cases} m + 2n = 4 \\ 3n - m = 16 \end{cases}$
entonces "n" vale:

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

3. Sabiendo que: $\begin{cases} a + 3b = -2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$
indicar el valor de "a"

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

4. Si: $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
entonces, hallar "x + y"

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 8

5. Sabiendo que: $\begin{cases} 3m + 5n = 7 \\ 2m - n = 4 \end{cases}$
calcular "5m + 4n"

- a) 11
- b) 7
- c) 19
- d) 81
- e) 4

Sistemas de ecuaciones con enunciado

1. Hallar dos números que sumados den 15 y restados den 1.

Solución:

Sea: "x" el mayor
"y" el menor

$$\text{Del enunciado: } \begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + x - y &= 15 + 1 \\ 2x &= 16 \\ x &= \frac{16}{2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

El otro número es: $8 + y = 15$
 $y = 7$

Adviértase que podría resolverse el problema mediante una ecuación con una sola incógnita pues "x" e "y" son dos números consecutivos: "x" y "x + 1", la ecuación:

$$\begin{aligned} x + x + 1 &= 15 \\ 2x + 1 &= 15 \\ 2x &= 14 \rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

2. Hallar la fracción que vale 1/3 cuando se añade 1 al numerador y que vale 1/4 si se agrega 1 al denominador.

Solución:

Sea la fracción: $\frac{x}{y}$

$$\text{del enunciado: } \begin{cases} \frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3(x+1) = y \\ 4x = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \dots\dots \alpha \\ 4x - y = 1 \dots\dots \beta \end{cases}$$

Restando las ecuaciones: " $\alpha - \beta$ "

$$\begin{aligned} 3x - y - (4x - y) &= -3 - 1 \\ 3x - y - 4x + y &= -4 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

En " β " tenemos:

$$\begin{aligned} 4(4) - y &= 1 \\ 16 - y &= 1 \\ 16 - 1 &= y \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Finalmente, la fracción es $\frac{4}{15}$

3. La suma de dos números es 10; además el triple del menor más el duplo del mayor es 24. Indicar la diferencia de dichos números.

Solución:

Sea el mayor: x
menor: y

$$\text{Del enunciado: } \begin{cases} x + y = 10 \\ 3y + 2x = 24 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \quad (\text{por } -2) \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -20 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$y = 4 \quad \text{luego: } x = 6$$

$$\therefore x - y = 2$$

4. La suma de dos números es 191. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 4 y el residuo es 16. La diferencia de dichos números es ...

Solución:

Sea el mayor número "a" y el menor "b".

Del enunciado: $a + b = 191$

$$a \overline{)b} \rightarrow a = 4b + 16$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 191 & \dots \alpha \\ a = 4b + 16 & \dots \beta \end{cases}$$

" β " lo reemplazo en la ecuación " α "

$$4b + 16 + b = 191$$

$$5b = 191 - 16$$

$$5b = 175$$

$$b = \frac{175}{5}$$

$$b = 35$$

En la ecuación " β " tenemos:

$$a = 4(35) + 16$$

$$a = 140 + 16$$

$$a = 156$$

$$\begin{aligned} \text{Piden la diferencia: } a - b &= 156 - 35 \\ &= 121 \end{aligned}$$

5. Hallar la suma de las inversas de los números cuya suma es 7 y su producto 13.

Solución:

Sean los números " x " e " y "

Dato del problema:

$$x + y = 7$$

$$xy = 13$$

Piden la suma de inversas de " x " e " y " que será:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{7}{13}$$

Problemas para la clase

Bloque I

1. La suma de las edades de Enrique y Luis es 32 años y la diferencia de las mismas es dos años. ¿Cuáles son estas edades?

Rpta.: _____

2. Dos números suman 7. ¿Cuál es el mayor de ellos si excede en 19 al número menor?

Rpta.: _____

3. El triple de la edad de Pedro, aumentado en la cantidad de años que tiene Armando resulta 15. Si la edad de Pedro aumentada en el triple de la edad de Armando resulta 13, ¿cuál es la edad de Pedro?

Rpta.: _____

4. Calcular dos números de modo que el triple del mayor exceda en 138 al número menor y que el duplo del mayor, aumentado en el quíntuple del menor, resulte 160.

Rpta.: _____

5. Dividir 200 en dos partes, tales que la mitad de la mayor exceda en 43 a la cuarta parte de la menor.

Rpta.: _____

6. Se compraron 20 kg de productos entre azúcar y arroz. Si un kilogramo de azúcar cuesta cuatro soles y un kilogramo de arroz cuesta tres soles. ¿Cuántos kilogramos de arroz se compró si el gasto total fue 72 soles?

Rpta.: _____

7. Una familia compuesta de nueve miembros entre adultos y niños asiste a un espectáculo por el que un adulto paga S/.7 y un niño paga S/.3. Si el papá invirtió S/.43 por este buen espectáculo, ¿cuántos adultos y cuántos niños componen esta familia?

Rpta.: _____

8. Al dividir una varilla de 90 cm en dos partes, resulta que un sexto de la parte mayor excede en 6 cm a un tercio de la parte menor, ¿cuánto mide la parte mayor?

Rpta.: _____

9. Carlos y Adrián obtienen 23 años al sumar sus edades. Si el duplo de la edad del mayor excede en 26 años a la mitad de la menor, ¿cuál es la edad del mayor?

Rpta.: _____

10. Una sección del colegio está compuesta de 25 alumnos entre hombres y mujeres. Si el cuádruple de la cantidad

de hombres excede en 15 a la cuarta parte de la cantidad de mujeres, ¿cuál es la cantidad de hombres que hay en la sección?

Rpta.: _____

11. Dividir 90 en dos partes de modo que un quinto de la parte mayor exceda en 6 a un séptimo de la parte menor

Rpta.: _____

12. Un gran salón de recepciones acoge a 100 personas entre hombres y mujeres. Si cada caballero pagó S/.30 por la entrada y cada dama pagó S/.10 por el mismo concepto, siendo la recaudación total de S/.2200, ¿cuántos hombres más que mujeres asistieron a la reunión?

Rpta.: _____

Bloque II

1. Calcular el mayor de dos números sabiendo que el triple de uno de ellos equivale al otro y la suma de ambos es 44.

Rpta.: _____

2. Dos números enteros son tales que el triple de uno de ellos aumentado en cuatro equivale al doble del otro. Si la suma de ellos es igual a 32, calcular la diferencia de ambos números.

Rpta.: _____

3. El triple de un número aumentado en 7 es igual a 25, si éste es duplicado y aumentado en un segundo número, se obtiene 30. Calcular dichos números.

Rpta.: _____

4. Dos números son tales que al quintuplicar uno de ellos y sumarle el doble del segundo se obtiene el cuadrado de 6, y al duplicar el primero y restarle el segundo se obtiene el cuadrado de 3. Calcular la suma de dichos números.

Rpta.: _____

5. Dos cantidades son tales que el cociente de la suma entre la diferencia es igual a 17, mientras que el cociente del mayor entre el menor es $\frac{9}{8}$. Calcular la menor diferencia del mayor menos el menor.

Rpta.: _____

6. Las edades de Ana y Luisa son tales que la suma de ellas es 32. Si la quinta parte de la edad del mayor, más la cuarta parte de la edad del menor es 7. Calcular la edad de Luisa si es la mayor.

Rpta.: _____

7. Las edades de un padre y su hijo son tales que su cociente es 4. Si dentro de 15 años el cociente será $\frac{7}{4}$, calcular la edad del padre dentro de siete años.

Rpta.: _____

8. Alberto es mayor en 18 años que su hermano Raúl. Dentro de tres años la relación de sus edades será de 3 a 1. ¿Cuál será la edad de Raúl dentro de 10 años?

Rpta.: _____

9. Gino tiene siete años más que su primo Karl, sin embargo el doble de la edad de Karl excede a la edad de Gino en dos años. ¿En cuánto excede el doble de la edad de Gino al triple de la edad de Karl?

Rpta.: _____

10. Cuando mi papi tenga seis años más, yo tendré 13 años. Si en la actualidad la suma de nuestras edades es cinco veces mi edad, ¿dentro de cuánto tiempo mi papá tendrá 40 años?

Rpta.: _____

Autoevaluación

1. La mitad de un número es igual a la tercera parte de otro. ¿Cuáles son dichos números, si su suma es igual a 10?
a) 4 y 6 b) 2 y 8 c) 1 y 9
d) 3 y 7 e) 12 y 18
2. Los $\frac{4}{5}$ de la suma de dos números es igual a 32. Por otro lado, $\frac{10}{9}$ de su diferencia es 20. Hallar el menor.
a) 29 b) 13 c) 11
d) 27 e) 14
3. Seumara tenía cierta suma de dinero. Gastó S/.30 en libros y los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba después del gasto anterior en ropa. Si todavía le quedan S/.30, ¿cuánto tenía al principio?
a) S/.90 b) 125 c) 150
d) 180 e) 240
4. Jairo tiene S/.1 950 en billetes de S/.100 y de S/.50. En total tiene 24 billetes. ¿Cuántos billetes son de S/.100?
a) 13 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17
5. Mi amigo Yalour tiene 28 animales entre conejos y patos. Si hay ocho conejos más que patos, ¿cuántos patos tiene Yalour?
a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 12

