División de polinomios (Método de Paolo Ruffini)

Al empezar nuestra "Historia Matemática", desde muy pequeños vimos las primeras cifras: 1; 2; 3; etc. y luego de eso, tratábamos de relacionarlas mediante las operaciones aritméticas fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división. Y es aquí donde, quizás para mucha gente, empieza el "GRAN DOLOR DE CABEZA" con respecto a las Matemáticas, al tratar de resolver ejercicios un tanto más complejos. Sin embargo, esto no tiene necesariamente que ser así, pues la Matemática puede ser disfrutada a plenitud aplicándola a hechos reales vividos día a día.

Debemos recordar que la primera operación vista fue: LA SUMA (+), con ejercicios clásicos como lo son: 2 + 2; 5 + 2; etc. Posteriormente, vimos una operación opuesta a la anterior: LA DIFERENCIA (—), y resolvimos ejercicios como: 7 - 2; 5 - 1; etc.

Luego conocimos lo que se denominaba "suma abreviada", o sea: LA MULTIPLICACIÓN (×), y calculamos productos como: 3 × 2; 5 × 4; etc.

Y finalmente llegamos a una operación opuesta a la multiplicación: LA DIVISIÓN (÷). Aquí, distinguimos los siguientes elementos:

DIVIDENDO ← 21 | 5 → DIVISOR
20   4 → COCIENTE
RESIDUO ← 1

Bueno, pero a lo mejor te preguntas: "¿Y qué tiene que ver con el Álgebra?", pues la respuesta es muy sencilla.

Toda nuestra "Historia Matemática" vivida de manera aritmética, (es decir, utilizando únicamente números), será repetida, pero ahora de manera algebraica (es decir, utilizando polinomios).

Si quieres, puedes revisar este libro y notarás que la **SUMA** y **DIFERENCIA** de polinomios, las vimos en el capítulo III. El **PRODUCTO**, lo vimos en los capítulos IV, V y VI; y ahora nos toca estudiar la **DIVISIÓN**, capítulo VII.

Así, que, sin más ni más, empecemos con el tema: DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

Parte teórica

División de polinomios

La división es un proceso en el cual, conocidos dos polinomios llamados: DIVIDENDO y DIVISOR, se obtienen otros dos llamados COCIENTE y RESIDUO.

DIVIDENDO ← $P_{(x)}$ | $d_{(x)}$ → DIVISOR
RESIDUO ← $R_{(x)}$ $Q_{(x)}$ → COCIENTE

OBSERVACIÓN: Para poder dividir dos polinomios éstos deben encontrarse completos y ordenados.

Ejemplos:

1. Sea el polinomio: $P_{(x)} = 5x + 3 + 2x^2 + x^3$

   ORDENANDO ⇒ $P_{(x)} = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

2. Sea el polinomio: $Q_{(x)} = 3x^3 + 5x - 1$

   COMPLETANDO ⇒ $Q_{(x)} = 3x^3 + 0x^2 + 5x - 1$

3. Sea el polinomio: $J_{(x)} = 2x - x^2 + 3x^4 + 5$

   ORDENANDO Y COMPLETANDO ⇒ $J_{(x)} = 3x^4 + 0x^3 - x^2 + 2x + 5$

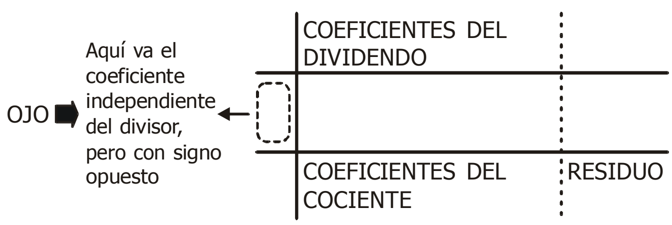
Métodos de División: Existen varias maneras de dividir polinomios, pero dos son los más destacados:

a. Método de Horner
b. Método de Ruffini

Por su grado de complejidad, esta vez veremos únicamente el método de Ruffini.

- **Método de Paolo Ruffini**

Aquí, se hará uso del siguiente diagrama:



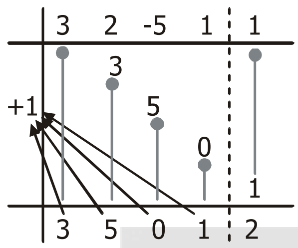
Las operaciones a realizar con los coeficientes son:

Ejemplo:

Dividir: $\dfrac{3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1}{x - 1}$

Solución:
Completamos el diagrama con los coeficientes, teniendo mucho cuidado con los signos.

Luego procedemos con las operaciones.



El resultado será completo con las variables, obteniéndose:

Cociente ➡ $Q_{(x)} = 3x^3 + 5x^2 + 0x + 1 = 3x^3 + 5x^2 + 1$
Residuo ➡ $R_{(x)} = 2$

Problemas resueltos

1. Dividir: $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$

Resolución:

$x + 3 = 0$ ➡ $x = -3$

	1	7	12
-3	↓	-3	-12
	1	4	0

cociente: $Q_{(x)} = 1x + 4 = x + 4$
residuo: $R_{(x)} = 0$

2. Dividir: $\dfrac{x^3 + 27}{x + 3}$

Resolución:
completanto y ordenando el dividendo:

$$\frac{x^3 + 0x^2 + 0x + 27}{x + 3}$$

$x + 3 = 0$ ➡ $x = -3$

	1	0	0	27
-3	↓	-3	9	-27
	1	-3	9	0

cociente: $Q_{(x)} = 1x^2 - 3x + 9$
residuo: $R_{(x)} = 0$

3. Dividir: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

Resolución:

$x - 1 = 0$ ➡ $x = 1$

	1	-3	3	-1
1	↓	1	-2	1
	1	-2	1	0

$\therefore\ Q_{(x)} = 1x^2 - 2x + 1$ y $R_{(x)} = 0$
$= x^2 - 2x + 1$

4. Dividir: $\dfrac{x^3 + x - 4x^2 - 8}{x - 4}$

Resolución:
ordenando el polinomio dividendo:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x - 8}{x - 4}$$

$x - 4 = 0$ ➡ $x = 4$

	1	-4	1	-8
4	↓	4	0	4
	1	0	1	-4

cociente: $Q_{(x)} = 1x^2 + 0x + 1$; $R_{(x)} = -4$
$= x^2 + 1$

5. Dividir: $\dfrac{x^4 - 60}{x - 2}$

Resolución:
ordenando y completando el polinomio dividendo:

$$\frac{x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 60}{x - 2}$$

$x - 2 = 0$ ➡ $x = 2$

	1	0	0	0	-60
2	↓	2	4	8	16
	1	2	4	8	-44

cociente: $Q_{(x)} = 1x^3 + 2x^2 + 4x + 8$
$= x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

residuo: $R_{(x)} = -44$

Problemas resueltos

Bloque I

En los siguientes ejercicios, calcular el cociente y residuo:

1. $\dfrac{2x^3+5x^2+3x-2}{x+1}=$

2. $\dfrac{7x^3-2x^2+5x-10}{x-1}=$

3. $\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x+1}=$

4. $\dfrac{2x^3+x^2-x+1}{x-2}=$

5. $\dfrac{5x^3+1}{x-1}=$

6. $\dfrac{2x^3-3x+1}{x+2}=$

7. $\dfrac{5x^3+1}{x-1}=$

8. $\dfrac{9x^2-8x^3-16-4x+2x^4}{x-3}=$

9. $\dfrac{3x+2x^4+1}{x-1}$

10. $\dfrac{x^4-9+10x^2}{x-3}$

11. Al dividir: $\dfrac{3x^2-5x+6}{x-1}$
su residuo:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Al dividir: $\dfrac{4x^2+2x^3+3x+6}{x+2}$
su cociente es:

a) $x^2 - 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $2x + 3$
d) $2x^3 + 3$ e) $2x^2 + 3$

Bloque II

1. Dividir: $\dfrac{4x^3-5x^2+3x-3}{x-1}$
e indicar su residuo.

a) 1 b) - 1 c) $\dfrac{1}{2}$
d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 0

2. Al dividir, su cociente es: $\dfrac{6x^3+x+2x^4+3}{x+3}$

a) $2x^2 + 1$ b) $2x^4 + 1$ c) $2x^3 + 1$
d) $2x^3 - 1$ e) $2x^4 - 1$

3. Dividir: $\dfrac{x^3+x^2-x-2}{x-1}$
e indicar el término independiente de su cociente.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

4. Dividir: $\dfrac{x^2+2x^3-5x+2}{x+2}$
e indicar la suma de coeficientes del cociente.

a) 1 b) - 1 c) 2
d) - 2 e) 0

5. Indicar la suma de coeficientes del cociente al dividir:

$$\frac{3x^3-32x^2+52x-63}{x-9}$$

a) 5 b) 10 c) - 5
d) - 10 e) 0

6. Completar el siguiente diagrama de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & 3 & -5 & \boxed{} & 6 \\
\hline
-3 & & & & & \\
 & & \boxed{} & 9 & -12 & 6 \\
\hline
 & 2 & -3 & \boxed{} & -2 & 12
\end{array}$$

Luego, indicar la suma de valores hallados.

a) 0 b) 20 c) 8
d) 14 e) 12

7. Completa el siguiente diagrama y luego indica el producto de los valores hallados:

$$\begin{array}{c|cccc:c} & \boxed{} & +1 & -3 & \boxed{} & -8 \\ \hline -2 & & & & & \\ & & -4 & 6 & -6 & 8 \\ \hline & 2 & \boxed{} & 3 & -4 & \boxed{} \end{array}$$

a) - 12 b) 12 c) 1
d) 16 e) 0

8. Hallar "a", para que la división: $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2x - a}{x - 1}$ sea exacta.

a) - 1 b) - 2 c) - 3
d) - 4 e) - 5

9. Determinar el valor de "n", si la división:

$$\frac{2x^3 + x^2 - 5x + (n - 7)}{x + 2}$$

tiene residuo nulo.

a) 9 b) 2 c) 5
d) 8 e) 7

10. Sabiendo que la división: $\dfrac{3x^4 + x^2 + 5x + (2n - 3)}{x + 1}$ es exacta, determinar el valor de "n".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Bloque III

1. Dividir: $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ indicar el cociente.

a) x - 4 b) x + n c) x - 6
d) x + 6 e) x

2. Dividir: $\dfrac{14 - 9x + x^2}{7 - x}$ indicar el residuo.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

3. Dividir: $\dfrac{x^2 - 2x - 63}{x - 9}$ indicar el cociente.

a) x b) x - 6 c) x + 6
d) x - 7 e) x + 7

4. Dividir: $\dfrac{x^3 - x^2 + 6x - 1}{x - 2}$ indicar el residuo.

a) 13 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17

5. Dividir: $\dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x + 4}$ indicar el cociente.

a) $x^3 - 4x^2 + 15x - 60$ b) $x^3 + 4x^2 - 15x - 60$
c) $x^3 - 4x^2 - 15x - 60$ d) $x^3 - x^2 - x - 60$
e) $x^3 - 3x^2 + 15x - 60$

6. Efectuar la siguiente división con respecto a la variable "a".

$$2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - 5b^3 \div (a - 2b)$$

indicar el residuo.

a) $3b^3$ b) $4b^3$ c) $5b^3$
d) $6b^3$ e) $7b^3$

7. Efectuar la siguiente división, con respecto a la variable "x".

$$12x^4 + 10x^3y + 8x^2y^2 + 6xy^3 + 4y^4 \div (x - y)$$

indicar el residuo.

a) $36y^4$ b) $39y^4$ c) $40y^4$
d) $41y^4$ e) $42y^4$

8. Dividir: $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ indicar el cociente.

a) $x^4 + 1$
b) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
c) $x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$
d) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
e) $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

9. Efectuar la siguiente división: $x^4 - 4x^2 + 16 \div (x + 4)$ calcular el residuo.

a) 204 b) 208 c) 209
d) 212 e) 216

10. Relacione los residuos de cada uno de las divisiones.

I. $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ II. $\dfrac{x^4 - 1}{x - 2}$ III. $\dfrac{x^6 - 1}{x + 2}$

a) R(I) = R(II) = R(III) b) R(III) > R(II) > R(I)

c) R(III) < R(II) < R(I) d) $R(I) = 2R(II) = \dfrac{R(III)}{2}$

e) Ninguna

Autoevaluación

1. Indicar el cociente al dividir: $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$

   a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 4x - 4$
   c) $x^2 - 4x + 4$ d) $x^2 + 4x - 4$
   e) 0

2. Al dividir: $\dfrac{2x^3+x-6x^2-3}{x-3}$

   se obtiene como cociente:

   a) $2x + 1$ b) $2x^3 + 1$ c) $2x - 1$
   d) $2x^3 - 1$ e) $2x^2 + 1$

3. Indicar el residuo al dividir: $\dfrac{3x^5-7x^2+6}{x-1}$

   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) 5

4. Calcular el residuo de la siguiente división:

   $$\frac{3x^3+5x^2-3x-7}{x+2}$$

   a) 1 b) - 2 c) - 3
   d) - 4 e) - 5

5. Determinar el valor de "n", para que la división:

   $$\frac{3x^3-17x^2+27x+(n+8)}{x-4}$$

   tenga como residuo 16.

   a) - 10 b) - 20 c) 10
   d) 20 e) 0

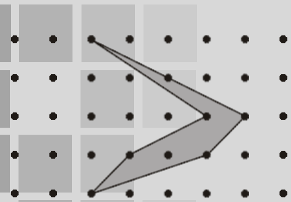
NOTAS CURIOSAS

... Áreas y punto(s) ...

Si nos pidieran calcular el área de una figura como el cuadrado, el triángulo, el círculo, etc. pues bastaría aplicar las fórmulas ya conocidas.

Sin embargo hay figuras para las cuales no existen fórmulas de cálculo de área. Es por este motivo, que el matemático checoslovaco G. Pick, publicó en 1899 una manera sencilla y bonita para el área de un polígono cuyos vértices son puntos de una red.

Observa el siguiente gráfico:



Hallar el área de la figura dibujada a la izquierda.

Para resolver este problema, aplicaremos la fórmula de Pick:

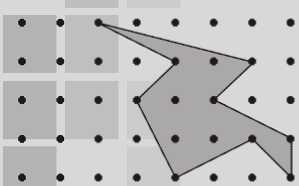
$$\boxed{\text{ÁREA} = \frac{B}{2} + I - 1}$$

donde: **B = puntos en el borde de la figura**
I = puntos en el interior de la figura

En nuestro caso tendremos: B = 7; I = 1; luego el área será:

$$\text{Área} = \frac{7}{2} + 1 - 1 = 3{,}5\ u^2$$

Veamos un ejemplo más:



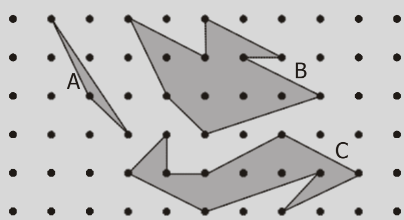
Hallar el área de la figura ubicada a la izquierda.

Del gráfico tenemos: B = 9; I = 4

Luego el área es:

$$\text{Área} = \frac{9}{2} + 4 - 1 = 4{,}5 + 3 = 7{,}5\ u^2$$

... y ahora un trabajo para ti ..., determina el área de:



Respuestas:
1. Fig. A = 0,5 u^2
2. Fig. B = 7 u^2
3. Fig. C = 5,5 u^2