

Productos Notables I



¡Atención a lo siguiente!

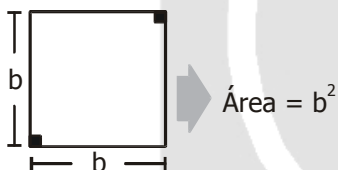
Si nos piden multiplicar: $(a + b)(a + b)$ obtendremos:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

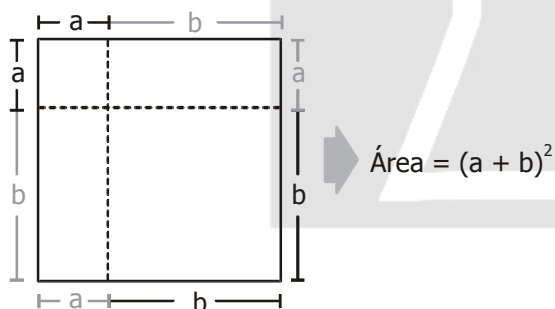
o sea: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lo anterior, es un resultado obtenido algebraicamente al multiplicar dos binomios. Sin embargo, no es la única manera de obtenerlo. Existe la manera GEOMÉTRICA.

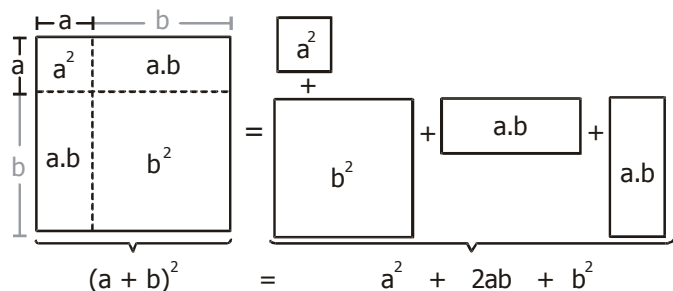
Observa esto:



Ahora, juntemos los cuadrados por una de sus esquinas y formemos imaginariamente un cuadrado mayor:



Sin embargo el área de ese cuadrado mayor, puede ser obtenida mediante la suma de las áreas que están en él:



Y esto es justamente el resultado obtenido en primer lugar pero de manera algebraica.

A la igualdad hallada, se le denomina BINOMIO AL CUADRADO, siendo uno de los tantos PRODUCTOS NOTABLES que existen.

Parte teórica

Productos Notables

Son multiplicaciones de polinomios de forma conocida cuyo resultado se puede recordar fácilmente sin necesidad de efectuar la propiedad distributiva de la multiplicación.

Principales Productos Notables

1. Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Existen muchísimos Productos Notables más, pero hoy veremos únicamente los tres ya mencionados.

Problemas resueltos

1. Reducir: $A = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$

Resolución:

desarrollando cada uno de los binomios:

$$A = x^2 - 2x(2) + 2^2 + x^2 + 2x(2) + 2^2$$

$$A = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4$$

reconociendo términos semejantes:

$$A = 2x^2 + 8$$

2. Efectuar: $(\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2})$

Resolución:

aplicando: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \sqrt{10}^2 - \sqrt{2}^2 = 10 - 2 = 8$$

3. Efectuar: $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

Resolución:

efectuando de dos en dos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(a + b)(a - b)}_{(a^2 - b^2)}(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \\ & \underbrace{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}_{(a^4 - b^4)}(a^4 + b^4) \\ & \underbrace{(a^4 - b^4)(a^4 + b^4)}_{a^8 - b^8} \end{aligned}$$

4. Efectuar:

$$(2x + 6)^2 - (x + 2)(x - 2) - (x + 12)^2 + (-2x^2)$$

Resolución:

$$\begin{aligned} & (2x)^2 + 2(2x)(6) + 6^2 - [x^2 - 2^2] - [x^2 + 2x(12) + 12^2] + (-2x^2) \\ & 4x^2 + 24x + 36 - x^2 + 4 - (x^2 + 24x + 144) - 2x^2 \\ & 4x^2 + 24x + 36 - x^2 + 4 - x^2 - 24x - 144 - 2x^2 \end{aligned}$$

agrupamos términos semejantes:

$$\underbrace{(4x^2 - x^2 - x^2 - 2x^2)}_0 + \underbrace{(24x - 24x)}_0 + (36 + 4 - 144)$$

finalmente es - 104

5. Reducir:

$$[x^2 - 2xy + y^2 - (x - y)^2] + x(a - x) + x(x - a)$$

Resolución:

desarrollando y efectuando:

$$\begin{aligned} & [x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)] + xa - x^2 + x^2 - xa \\ & \underbrace{[x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2]}_0 + \underbrace{xa - x^2 + x^2 - xa}_0 \end{aligned}$$

Finalmente el resultado es: 0

Problemas para la clase

Bloque I

Desarrollar cada uno de las siguientes expresiones:

- $(x + 2)^2 =$ _____
- $(x - 7)^2 =$ _____
- $(2x + 3)^2 =$ _____
- $(x + 5)^3 =$ _____
- $(x - 2)^3 =$ _____
- $(x + 4)(x - 4) =$ _____

7. $(x + 6)(x - 6) =$ _____

8. $(x + 1)(x - 1) =$ _____

9. Reducir: $(x + 1)^2 + (x - 1)^2$

- a) $2x^2 - 2$ b) $2x^2 + 2$ c) $2x^2$
d) 2 e) 0

10. Efectuar: $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$

- a) 12x b) 6x c) - 6x
d) $2x^2 + 18$ e) 0

11. Efectuar: $(4x + 5)(4x - 5) + 25$

- a) $4x^2$ b) $16x^2$ c) $8x^2$
d) $10x^2$ e) x^2

12. Efectuar: $(x + 3)(x - 3) + (7 + x)(7 - x)$

- a) 40 b) 49 c) x^2
d) $2x^2$ e) x^2

Bloque II

1. Reducir: $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$

- a) 4xy b) xy c) 8xy
d) $4y^2 + 2x^2$ e) 0

2. Efectuar: $(2x + 1)(2x - 1) + (3 + x)(x - 3)$

- a) $5(x^2 - 1)$ b) $5(x^2 + 1)$ c) $5(x^2 + 2)$
d) $5(x^2 - 2)$ e) 0

3. Efectuar: $(x + 4)^2 - (x + 1)^2 - 6x$

- a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25

4. Calcular: $\sqrt{(x + 10)^2 - (x + 6)^2} - 8x$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

5. Calcular: $\sqrt{(8 + x)(8 - x) + (x + 6)(x - 6)} - 3$

- a) 10 b) 9 c) 8
d) 7 e) 5

6. Reducir: $\sqrt{(x + 13)(13 - x) + (12 + x)(x - 12)}$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

7. Efectuar: $(x + 2)(x - 2) + (x + 3)(3 - x)$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. Reducir: $\sqrt{(x+1)^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+4)^2}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

9. Reducir: $\sqrt[3]{(x+6)^2 - (x+3)^2 - 6x}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) -2

10. Simplificar:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{19}+1)(\sqrt{19}-1) + (1+\sqrt{10})(\sqrt{10}-1)}$$

- a) -2 b) -3 c) 1
d) 2 e) 3

Bloque III

1. Efectuar: $(5x+6)(5x-6) + 36$

- a) 25x b) \dots^2 c) $5x^2$
d) $-25x^2$ e) 0

2. Reducir: $(x+6)^2 - (x-6)^2$

- a) 6x b) 12x c) 24x
d) 48x e) 50x

3. Reducir: $4(x-y)^2 + 4(2xy) - 4(x^2+y^2)$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

4. Reducir: $(2x+1)(2x-1) + (1+3x)(1-3x)$

- a) 0 b) $-4x^2$ c) $4x^2$
d) $5x^2$ e) $-5x^2$

5. Si: $(a+b)^2 = 4ab$, entonces:

- a) $a > b$ b) $a < b$ c) $a = b$
d) $a = 2b$ e) $a = \frac{b}{2}$

6. Efectuar:

$$(\sqrt{x+abc} + \sqrt{x-abc})(\sqrt{x+abc} - \sqrt{x-abc})$$

- a) abc b) 2abc c) 3abc
d) 4abc e) 5abc

7. Efectuar: $(a+1)(a-1)(a^2+1)(a^4+1)$

- a) 0 b) $a^4 - 1$ c) $a^4 + 1$
d) $a^8 + 1$ e) $a^8 - 1$

8. Desarrollar: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$

- a) 0 b) 1 c) 4
d) 8 e) 16

9. Si: $a+b=4$
 $ab=1$
hallar: a^2+b^2

- a) 14 b) 13 c) 12
d) 11 e) 10

10. Desarrollar: $(a+b)^4 - (a-b)^4$

- a) $8ab(a^2+b^2)$ b) $4ab(a^2+b^2)$
c) $2ab(a^2+b^2)$ d) $ab(a^2+b^2)$
e) $ab(a+b)$

Autoevaluación

1. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- I. $(x-3)^2 = x^2 + 6x - 9$
II. $(x+y)(y-x) = x^2 - y^2$
III. $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

- a) V F V b) F V V c) F F V
d) V V F e) V F F

2. Reducir: $(5+x)(x-5) - x^2$

- a) 25 b) $-x^2$ c) $-2x^2$
d) -25 e) $2x^2 - 25$

3. Efectuar: $(2x-y)^2 - 4x^2 - y^2$

- a) $-4xy$ b) $2xy$ c) $-2xy$
d) $4xy$ e) 0

4. Calcular: $\sqrt{(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1) + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

5. Reducir: $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 4x$

- a) 0 b) 2x c) 4x
d) 6x e) 8x

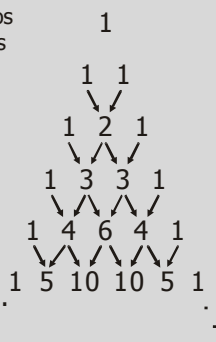
NOTAS CURIOSAS

Como habrás visto, los dos primeros Productos Notables, están referidos al binomio $(a + b)$ elevado al cuadrado (2) y al cubo (3).

Sin embargo, este mismo binomio afectado a los exponentes 4; 5; 6; ...; etc., seguirá siendo un Producto notable cuyo desarrollo también será escrito mediante una fórmula, pero claro, un tanto más compleja.

Memorizar fórmulas de este tipo puede resultar muy trabajoso, así que observa el siguiente método práctico llamado TRIÁNGULO DE TARTAGLIA.

OJO: los números obtenidos por las flechas, corresponden a la suma de los números superiores.



- Estos son los coeficientes de $(a + b)^2$
- Estos son los coeficientes de $(a + b)^3$
- Estos son los coeficientes de $(a + b)^4$

De esta manera, si queremos calcular el desarrollo de $(a + b)^5$, tomamos la última fila del triángulo:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

OJO: Nota que la variable "a" empieza con el exponente del binomio y luego va decreciendo de 1 en 1.

OJO: Observa que la variable "b" empieza con el exponente "0" y luego va creciendo de 1 en 1 hasta llegar al exponente del binomio (5).

Y ahora ... ¿crees que puedas desarrollar: $(a + b)^6$? ... ¡Inténtalo!

Productos Notables II

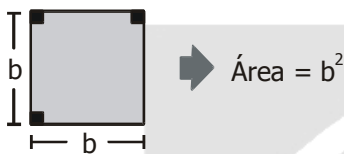


Recordando el capítulo anterior, hoy realizaremos algo muy similar.

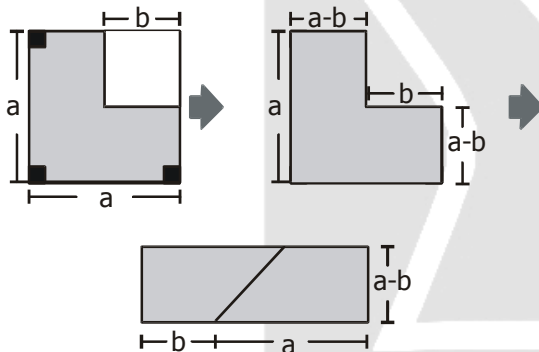
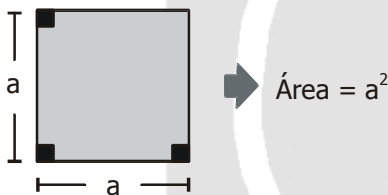
Observa el siguiente producto algebraico:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ahora veámoslo desde el punto de vista geométrico:



Si queremos calcular: $a^2 - b^2$



El área del rectángulo obtenido es: $(a + b)(a - b)$

La diferencia de áreas es: $a^2 - b^2$ (corresponde al primer cuadrado).

Entonces: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; que es el resultado requerido.

Parte teórica

A las fórmulas ya conocidas como:

- **Binomio al cuadrado** $\Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- **Binomio al cubo** $\Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- **Diferencia de cuadrados** $\Rightarrow (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Agregamos las siguientes:

- **Término común** $\Rightarrow (x + a)(a + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- **Trinomio al cuadrado:**
 $\Rightarrow (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$
- **Identidades de Legendre:**
 $\Rightarrow (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
 $\Rightarrow (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Al resolver los ejercicios, aplica las fórmulas con mucho cuidado. Un error en algún signo, o en algún coeficiente, o en un exponente, determinaría una respuesta errónea. No te preocupes si en los primeros intentos los resultados satisfactorios sean pocos; ten presente que para resolver ejercicios matemáticos se requiere de paciencia y mucha perseverancia.

... ¡Tú puedes hacerlo!!

Problemas resueltos

1. Reducir: $A = (x + 2)(x + 4) - (x - 7)(x - 4)$

Resolución:

efectuando cada uno se tiene:

$$A = x^2 + 6x + 8 - (x^2 - 11x + 28)$$

$$A = x^2 + 6x + 8 - x^2 + 11x - 28$$

reduciendo términos semejantes:

$$A = 17x - 20$$

2. Desarrollar: $(x - 2)^3$

Resolución:

recordando: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

3. Efectuar: $\sqrt{(x + 6)^2 - (x + 4)(x + 8)}$

Resolución:

$$\sqrt{x^2 + 2x(6) + 6^2 - [x^2 + 12x + 32]}$$

$$\sqrt{x^2 + 12x + 36 - x^2 - 12x - 32}$$

reduciendo términos semejantes:

$$\sqrt{36 - 32} \quad \sqrt{4} = 2$$

4. Reducir: $(x^2 - 4x - 1)^2 - (x^2 - 4x - 2)^2 - 2(x^2 - 4x + 4)$

Resolución:

hacemos el cambio: $x^2 - 4x = y$

$$(y - 1)^2 - (y - 2)^2 - 2(y + 4)$$

desarrollando cada uno se tiene:

$$y^2 - 2y(1) + 1^2 - [y^2 - 2y(2) + 2^2] - 2(y + 4)$$

$$y^2 - 2y + 1 - (y^2 - 4y + 4) - 2y - 8$$

$$y^2 - 2y + 1 - y^2 + 4y - 4 - 2y - 8$$

agrupando términos semejantes:

$$\underbrace{(y^2 - y^2)}_0 + \underbrace{(-2y + 4y - 2y)}_0 + \underbrace{(1 - 4 - 8)}_{-11}$$

∴ el resultado es: - 11

5. Reducir: $(a + b)^3 - (a - b)^3$

Resolución:

desarrollando cada uno se tiene:

$$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

eliminamos los paréntesis:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

reduciendo términos semejantes:

$$3a^2b + b^3 + 3a^2b + b^3$$

$$6a^2b + 2b^3$$

Problemas resueltos

Bloque I

Desarrolla cada uno de los siguientes productos notables:

1. $(x + 5)(x + 3) =$

2. $(x + 7)(x + 1) =$

3. $(m + 5)(m - 2) =$

4. $(m + 2)(m - 6) =$

5. $(2x + 5)^2 =$

6. $(3x - 2)^2 =$

7. $(5x + 3y)^2 =$

8. $(x + 3)(x - m) =$

9. $(m + 2)(2 - m) =$

10. $(3x + 5)(5 - 3x) =$

11. Reducir: $(x + 4)(x - 4) - x^2$

- a) 16 b) - 16 c) - 20
d) 20 e) 0

12. Simplificar: $(x + 3)(x + 4) - (x + 1)(x + 6)$

- a) 6 b) 12 c) - 6
d) - 12 e) 0

Bloque II

1. Simplificar: $(x + 5)^2 - (x + 6)(x + 4)$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Calcular: $(n + 2)(n + 7) - (n + 3)(n - 3) - 23$

- a) n b) 7n c) 3n
d) 9n e) 0

3. Reducir: $\sqrt{(x + 2)(x + 8) - (x + 5)^2} + 10$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

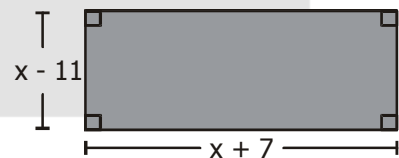
4. Simplificar: $\sqrt{(x + 3)^2 - (x + 2)(x + 4)}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Reducir: $(a + 1)(a - 2)(a - 1)(a + 2)$

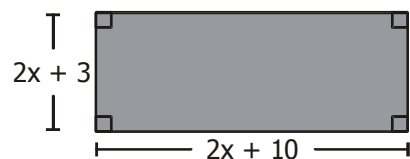
- a) $a^4 - 5a^2 + 4$ b) $a^4 + 5a^2 - 4$
c) $a^4 - 5a^2 - 4$ d) $a^4 + 5a^2 + 4$
e) 0

6. Calcular el área de la siguiente figura:



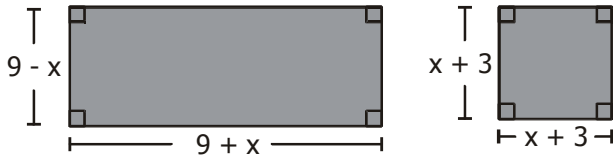
- a) $x^2 + 4x + 77$ b) $x^2 - 4x - 77$
c) $x^2 + 4x - 77$ d) $x^2 - 4x + 77$
e) 1

7. Determinar el área del siguiente rectángulo:



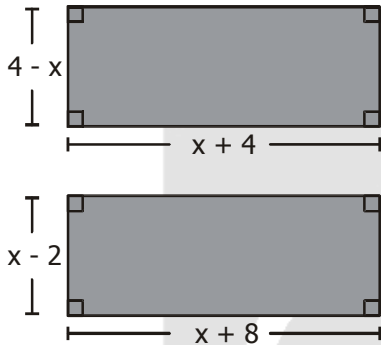
- a) $2x^2 + 26x + 30$ b) $4x^2 + 26x + 30$
c) $4x^2 + 30x + 26$ d) $2x^2 + 30x + 26$
e) 30

8. Calcular la suma de áreas de las regiones sombreadas:



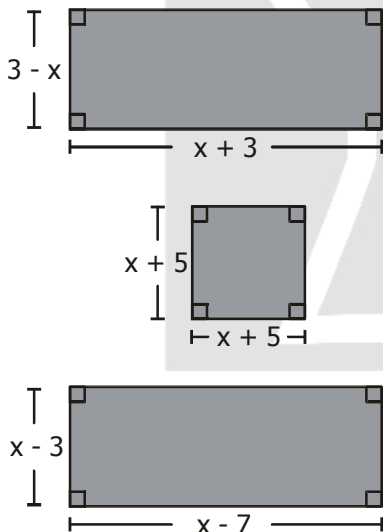
- a) $81 + x^2$ b) $2x^2 + 6x + 90$
 c) $6x + 81$ d) $2x^2 - 6x + 90$
 e) $6x + 90$

9. Calcular la suma de áreas de las regiones sombreadas:



- a) $2x$ b) $3x$ c) $4x$
 d) $5x$ e) $6x$

10. Calcular la suma de áreas de las regiones sombreadas.



- a) $x^2 - 55$ b) $x^2 + 55$ c) $x + 55$
 d) $x - 55$ e) 3

Bloque III

1. Efectuar: $(a + 5)^2 - (a + 4)(a + 6)$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

2. Reducir: $(m + n)^2 - (m - n)^2 + (m - 2n)^2 - m^2 - 4n^2$

- a) 0 b) n c) m
 d) $2mn$ e) $m + n$

3. Efectuar: $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{6}$
 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

4. Desarrollar: $(y + 5)^3$

- a) $y^3 + 15y^2 + 76y + 125$
 b) $y^3 + 15y^2 + 74y + 125$
 c) $y^3 + 15y^2 + 75y + 125$
 d) $y^3 + 11y^2 + 75y + 125$
 e) $y^3 + 125$

5. Efectuar: $E = \sqrt{a(a+2)+1} - (a+1)$; $a \in \mathbb{IN}$

- a) 0 b) 1 c) 2
 d) 3 e) 4

6. Si: $x - y = 8$, calcular: $(x - 3y)^2 - 4y(2y - x) + 8$

- a) 64 b) 72 c) 100
 d) 90 e) 103

7. Reducir: $M = (x + 2)^2 - (2 - x)^2 + (x - 4)^2 - x^2 - 16$

- a) 0 b) 2 c) x
 d) $4x$ e) $x + 2$

8. Efectuar: $E = (x + y + 3)(x + y - 3)$

- a) $x^2 + 2xy + y^2 - 9$ b) $xy - 9$
 c) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 2xy - y^2 - 9$
 e) $x^2 + y^2 + 9$

9. Efectuar: $E = \left(a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2$; si: $a; b > 0$

- a) 0 b) a c) $4ab$
 d) $-4ab$ e) $\frac{a}{b}$

10. Simplificar:

$$E = (a + b)^3 + 3(a + b)^2(a - b) + 3(a + b)(a - b)^2 + (a - b)^3$$

- a) $8a^3$ b) $8a^2$ c) $6a^3$
 d) 0 e) $8a$

