Progresión Aritmética

DESCARGA MATEMATICAS
WWW.DESCARGAMATEMATICAS.COM

• Introducción

En el presente capítulo abordaremos conceptos y problemas que fueron tratados por grandes matemáticos, hace miles de años, tal es el caso de lo registrado en el papiro de RIND, hallado por este a fines del siglo pasado, que fue escrito unos 2000 años antes de nuestra era.

Entre los problemas aritméticos que figuraban en dicho papiro esta el de "la repartición del pan" que más adelante se lo planteamos como un desafío.

Por otro lado, la naturaleza nos muestra que muchos fenómenos pueden ser analizados según su recurrencia por ejemplo: el cometa Halley es visible desde la tierra cada 76 años, así también en nuestra vida encontramos aplicaciones sencillas como:

* Ejemplo inductivo:

Un médico recetó a Esmeralda tomar una pastilla cada 5 días a partir del 7 de marzo y durante dicho mes. Completa el siguiente esquema:

N° toma	:	1°	2°	3°	....
Día	:	7	...	...	

Además:

I. La tercera toma fue el día _____de marzo.
II. La última toma fue el día _____de marzo y fue la _____toma.
III. La diferencia de días entre dos tomas consecutivas es _____días.

De este ejemplo se observa que:

i) El conjunto: 7, 12, 17, 22, 27 es un conjunto ordenado donde a cada elemento llamaremos **término.**

ii) Cada término tiene un **orden** designado o **número ordinal** el cual guarda una correspondencia con su respectivo término. Del ejemplo:

primer término : $t_1 = 7 = \mathbf{1} \cdot 5 + 2$
segundo término : $t_2 = 12 = \mathbf{2} \cdot 5 + 2$
tercer término : $t_3 = 17 = \mathbf{3} \cdot 5 + 2$
cuarto término : $t_4 = 22 = \mathbf{4} \cdot 5 + 2$
quinto término : $t_5 = 27 = \mathbf{5} \cdot 5 + 2$

iii) La característica fundamental de este tipo de conjunto es que: la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es siempre un valor constante que llamaremos **razón aritmética** (r). Del ejemplo:

t_1 t_2 t_3 t_4 t_5
7 → 12 → 17 → 22 → 27
+5 +5 +5 +5 → razón aritmética: r = +5

"A un conjunto con esta característica lo llamaremos progresión aritmética"

• Definición

Una progresión aritmética es un conjunto de números, ordenados de tal manera que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera (el de mayor orden menos el otro) es siempre una constante llamada valor de la razón aritmética (r)

Ejemplo:

N° ordinal:	1°	2°	3°	4°	.....	n°
Término:	5	8	11	14	.....	3n+2

+3 +3 +3

razón aritmética: r = +3

Según el signo del valor de la razón aritmética, las progresiones aritméticas pueden ser:

i) Progresión aritmética creciente, cuando la razón es positiva (r > 0)

6 , 13 , 20 , 27 , 34 , ...
+7 +7 +7 +7 → razón: r = +7

ii) Progresión aritmética decreciente, cuando la razón es negativa (r < 0)

20 , 14 , 8 , 2 , -4 , ...
-6 -6 -6 -6 → razón: r = -6

Cálculo de un término de la P.A. cuyo lugar es "n".

Se recomienda establecer una correspondencia entre cada término y su respectivo número ordinal.

* Ejemplo inductivo:

Dada la P.A.: 6, 10, 14, 18, ...

Halle:

i) El término de n - esimo lugar (t_n)
ii) El término de vigésimo lugar (t_{20})

Resolución:

N° ordinal:	1°	2°	3°	4°	....	n°
Término:	6	10	14	18	....	t_n

+4 +4 +4 ....

i) Cada término se deberá expresar en función de su número ordinal y la razón.

$t_1 = 6$
$t_2 = 6 + 1(4)$
$t_3 = 6 + 2(4)$
$t_4 = 6 + 3(4)$

$\vdots \qquad \vdots$

$t_{10} = 6 + 9(4)$
$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$
$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$
$t_n = 6 + (n - 1)(4)$

$\boxed{t_n = 4n + 2}$

ii) A partir de "t_n" hallaremos "t_{20}", para lo cual: n = 20 (lugar 20)

$$t_{20} = 4(20) + 2 = 82$$

* <u>Ejemplo 2:</u>

Dada la siguiente progresión aritmética, halle el término enésimo (t_n)

N° ordinal: 1° 2° 3° 4° ... n°

7 , 4 , 1 , -2 ... t_n

-3 -3 -3 ⟶ razón: r = -3

Luego:

$t_1 = 7$
$t_2 = 7 - 1(3)$
$t_3 = 7 - 2(3)$
$t_4 = 7 - 3(3)$
$\vdots$
$t_n = 7 - 3(n - 1)$

$\therefore \; t_n = 10 - 3n$

En general:

Dada una progresión aritmética, el término de enésimo lugar (t_n) se calcula:

$$t_n = t_1 + (n - 1) \times r$$

• Cálculo del número de términos de una P.A.

<u>Problema general</u>.- Dada la siguiente progresión aritmética finita, calcule el número de términos (n)

"n" términos

$t_1 \xrightarrow{r} t_2 \xrightarrow{r} t_3 \xrightarrow{r} t_4 , \; .... \; , t_n$

Sabemos: $t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r$

Despejando "n" tenemos: $n = \dfrac{t_n - t_1}{r} + 1$

* Observa que para calcular el número de términos "n", necesitas:

r: razón aritmética
t_n: último término
t_1: primer término

$$\#\text{ términos} = \frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{razón}} + 1$$

DESAFÍO

La repartición del pan

Entre cinco personas se repartieron cinco medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que la segunda, y a la cuarta más que la tercera y a la quinta más que la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron la séptima parte de las tres restantes. ¿Cuánto recibió la tercera?

Problemas para la clase

Bloque I

1. Halle la fórmula (general) del término enésimo de la siguiente P.A.: 53, 65, 77, ... , t_n

a) 50 + 6n b) 37 + 16n c) 17 + 12n
d) 47 + 6n e) 41 + 12n

2. Halle el término de lugar 23 de la siguiente P.A.: $12_{(5)}$; $23_{(5)}$; $34_{(5)}$, ... de como respuesta la suma de sus cifras.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

3. Halle el mayor término de tres cifras de la siguiente P.A.: 33, 38, 43, 48, ...

a) 993 b) 999 c) 990
d) 998 e) 988

4. ¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.:

$\overline{8a}, \overline{bc}, \overline{aa}, \overline{def}, ..., \overline{fff}$?

a) 46 b) 82 c) 84
d) 60 e) 72

5. La diferencia entre el quinto y segundo término de una P.A. es 33, halle la diferencia entre el término de lugar 15 y el de lugar 23.

a) 22 b) 11 c) 40
d) 88 e) 68

6. ¿Cuántas cifras se usan al escribir todos los números pares entre 48 y 650?

a) 686 b) 587 c) 987
d) 887 e) 885

7. Para escribir todos los números impares desde 67 hasta "N" se han empleado 679 cifras. Halle "N".

a) 479 b) 529 c) 629
d) 849 e) 649

8. ¿Cuántas hojas tiene un libro sabiendo que en la enumeración de todas ellas se observó que en las 12 últimas se utilizaron 69 cifras?

a) 40 b) 80 c) 56
d) 64 e) 60

9. Halle cuántas cifras se emplearán al escribir todos los términos de la siguiente progresión aritmética:

$\overline{a1}, \overline{a9}, \overline{bc}, \overline{dd}, ..., \overline{d(a-1)c}$

a) 156 b) 527 c) 120
d) 180 e) 200

10. Al enumerar las páginas de un libro se han empleado 1353 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos se utilizarían al enumerar el mismo libro en base 7?

a) 1600 b) 1540 c) 1825
d) 1500 e) 1680

11. Calcule la suma de cifras del antepenúltimo término de la siguiente P.A.:

$\overline{a1}, \overline{bb}, \overline{a9}, ..., \overline{abc}$

si además: c > a

a) 19 b) 9 c) 11
d) 8 e) 13

12. ¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.:

$\overline{mn}, \overline{mp}, \overline{mq}, ..., \overline{pm(n+p)}$?

si además: p + q = 12

a) 98 b) 136 c) 100
d) 128 e) 102

Bloque II

1. ..... $_{(7)}$; $61_{(7)}$; $106_{(7)}$; ... . De como respuesta la suma de sus cifras.

a) 6 b) 12 c) 8
d) 7 e) 5

2. ¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.:

$\overline{ab}, 23, \overline{cd}, 37, ..., \overline{abc}$?

a) 27 b) 16 c) 22
d) 20 e) 18

3. En una P.A. decreciente los dos primeros términos de lugar par son 156 y 168, además el último término de lugar impar es igual a la razón. Calcule la cantidad de términos de la P.A., si es un número par.

a) 32 b) 26 c) 40
d) 35 e) 30

4. Halle el tercer término positivo de:
-141, -132, -123, ...

a) 5 b) 9 c) 12
d) 22 e) 21

5. Si la diferencia entre el séptimo y segundo término de una P.A. es $\overline{nn}$, halle la diferencia entre el término de lugar 37 y el de lugar 25.

a) 132 b) 120 c) 168
d) 48 e) 92

6. ¿Cuántas cifras se utilizarán para escribir todos los términos de la siguiente P.A.:
43, 51, 59, ..., 1203?

a) 528 b) 456 c) 544
d) 654 e) 356

7. Calcule "a + b + c", si para escribir todos los términos del siguiente conjunto ordenado: 30, 35, 40, ..., $\overline{abc}$ se empleó 508 cifras.

a) 16 b) 20 c) 22
d) 18 e) 24

8. ¿Cuántas cifras se han empleado para enumerar las 650 hojas de un libro?

a) 4093 b) 3983 c) 4183
d) 1842 e) 4993

9. ¿Qué lugar ocupa el término central de la siguiente progresión aritmética:

$\overline{ab(a-b)}, \ldots, \overline{a8}, 52, \overline{3b}, \overline{cd}$?

a) 45 b) 37 c) 21
d) 17 e) 19

10. Calcule la suma de cifras del décimo tercer término de la siguiente P.A.: $511_{(n)}, \ldots, 100_{(n)}, 52_{(n)}, 34_{(n)}$

a) 5 b) 11 c) 6
d) 7 e) 8

11. Todos los términos de la siguiente P.A. son de tres cifras:

$\overline{aaa}, \overline{abc}, \overline{ac3}, \overline{(b-1)dc}, \ldots$

Determine cuántos son, si es lo máximo posible.

a) 26 b) 35 c) 64
d) 128 e) 96

12. Dadas las siguientes P.A.:

$P.A._1 = 30, 42, 54, \ldots$

$P.A._2 = 81, 96, 111, \ldots$

Halle el vigésimo término común y el lugar que ocupa en la primera P.A.

a) 366; 80 b) 1216; 124
c) 1116; 104 d) 1216; 104
e) 1116; 80