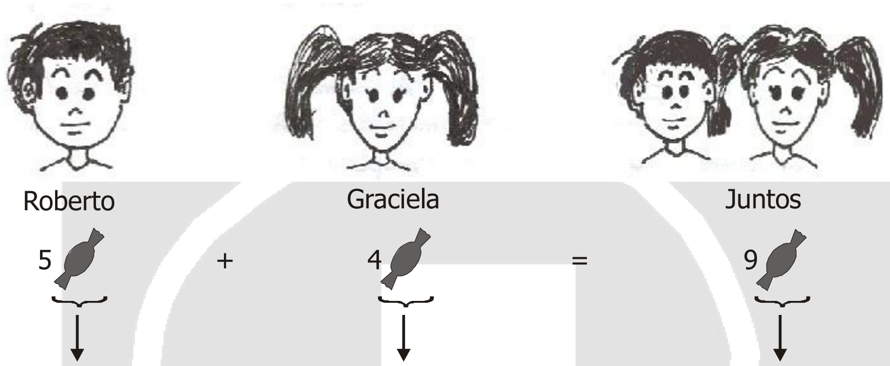
Operaciones con polinomios (Adición y Sustracción)

¿Sabes lo que significa SEMEJANTE?

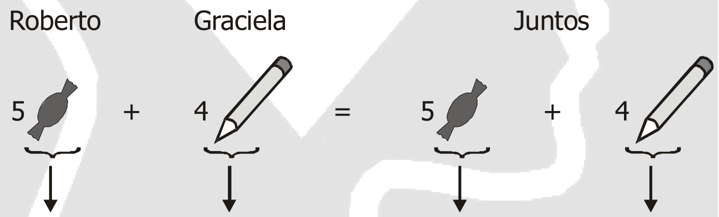
Decir que dos o más cosas son parecidas, similares o "semejantes", significa que tienen alguna característica en común. Ahora bien, si tenemos muchos objetos SEMEJANTES, entonces podremos realizar algunas operaciones aritméticas con ellos.

Así por ejemplo, supongamos que Roberto tiene cinco caramelos y que Graciela tiene cuatro caramelos, entonces juntos tendrán nueve caramelos. Lo anterior puede ser simbolizado de la siguiente manera:



o también así: 5c + 4c = 9c

Sin embargo, al suponer que Roberto tiene cinco caramelos y que Graciela tiene cuatro lápices, entonces juntos tendrán cinco caramelos y cuatro lápices. Es decir, no podemos sumar cosas que no son semejantes. Lo anterior puede ser simbolizado así:



o también así: 5c + 4l = 5c + 4l

En conclusión, para poder reunir (sumar) cualquier objeto, estos deben ser SEMEJANTES.
En Álgebra, para poder sumar y/o restar polinomios, se trabajará utilizando sus TÉRMINOS SEMEJANTES.

Parte teórica

Términos semejantes

Son aquellos términos algebraicos cuyas variables y exponentes respectivos son iguales.

Ejemplo:

Estos son términos semejantes: $7x^2; -\frac{3}{2}x^2; 5x^2$

Estos **no** son términos semejantes: $5x^3; y^2; -8z^5$

Adición de polinomios

Al sumar polinomios, se reducirán sus términos semejantes. Aquellos que no lo sean, serán colocados conservando su propio signo.

Ejemplos:

1. Dados los polinomos: $P_{(x)} = 7x^2 + 3x - 5$
   $Q_{(x)} = 5x^2 - 2x + 9$

   Calcular: $P_{(x)} + Q_{(x)}$

   Solución:
   En primer lugar, escribimos los polinomios uno al lado del otro:

$$\overbrace{7x^2 + 3x - 5}^{P(x)} + \overbrace{5x^2 - 2x + 9}^{Q(x)}$$

   Ahora seleccionamos los términos semejantes:

$$7x^2 + 3x - 5 + 5x^2 - 2x + 9$$

   Hecho esto, reducimos los términos seleccionados obteniendo el resulado: $12x^2 + x + 4$

2. Calcular: $P_{(x)} + Q_{(x)} + R_{(x)}$; sabiendo que:
   $P_{(x)} = 3x^2 + 5$; $Q_{(x)} = 8x^3 + 5x^2 - 1$; $R_{(x)} = 8\,x + 4$

   Solución:
   Colocamos los tres polinomios juntos:

$$3x^2 + 5 + 8x^3 + 5x^2 - 1 + 8x + 4$$

   Los términos semejantes se reducen, los otros son colocados con su propio signo.

$$8x^3 + 8x^2 + 8x + 8$$; esta es la respuesta.

Resta de polinomios

La gran diferencia que existe con la suma, es que el polinomio negativo (precedido por un signo -) se le cambiarán, previamente, los signos de TODOS sus términos. Luego de esto, se procederá como en la suma.

Ejemplo: Si tenemos: $P_{(x)} = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 7$
$Q_{(x)} = x^3 - 7x^2 + 3x - 11$

calcular: $P_{(x)} - Q_{(x)}$

Solución:

$$\overbrace{2x^3 + 5x^2 + 10x - 7}^{P(x)} - \overbrace{(x^3 - 7x^2 + 3x - 11)}^{Q(x)}$$

OJO: $Q_{(x)}$ es el polinomio negativo (observa el signo a su izquierda). Nota como se han colocado los "( )"

Ahora cambiamos los signos a todos los términos de $Q_{(x)}$:

$$2x^3 - 5x^2 + 10x - 7 - x^3 + 7x^2 - 3x + 11$$

Seleccionamos términos semejantes y reducimos:

$$2x^3 - 5x^2 + 10x - 7 - x^3 + 7x^2 - 3x + 11$$
$$= x^3 + 2x^2 + 7x + 4$$ ... y eso es todo !!

Problemas resueltos

1. Si: $P_{(x)} = 7x^5 + 3x^3 - x^2 + 1$
$Q_{(x)} = 8x^3 - 5x^2 + 9$

efectuar: $P_{(x)} + Q_{(x)}$

Resolución:
Escribiendo uno a continuación del otro:

$P_{(x)} + Q_{(x)} = (7x^5 + 3x^3 - x^2 + 1) + (8x^3 - 5x^2 + 9)$

eliminando paréntesis:

$P_{(x)} + Q_{(x)} = 7x^5 + 3x^3 - x^2 + 1 + 8x^3 - 5x^2 + 9$

reduciendo términos semejantes:

$P_{(x)} + Q_{(x)} = 7x^5 + 11x^3 - 6x^2 + 10$

Otra forma: colocando uno debajo de otro:

$$\begin{array}{rcccc} P: & 7x^5 & +8x^3 & -x^2 & +1 \\ Q: & & 8x^3 & -5x^2 & +9 \\ \hline P+Q: & 7x^5 & +11x^3 & -6x^2 & +10 \end{array}$$

2. Del polinomio: $5a^2b^2 - 8a^2b + 6ab^2$
restar: $3a^2b^2 - 6a^2b + 5ab^2$

Resolución:
tenemos:
$= (5a^2b^2 - 8a^2b + 6ab^2) - (3a^2b^2 - 6a^2b + 5ab^2)$
$= 5a^2b^2 - 8a^2b + 6ab^2 - 3a^2b^2 + 6a^2b - 5ab^2$

reduciendo términos semejantes:
$= 2a^2b^2 - 2a^2b + ab^2$

3. Efectuar las operaciones siguientes:
$(4x^4-5x^3+8x-10)-(-5x^4+7x^2-4x-12)+(-6x^4+10x^3+x^2-12)$

Resolución:
procedemos así:

$$\begin{array}{ccccc} 4x^4 & -5x^3 & +0x^2 & +8x & -10 \\ 5x^4 & +0x^3 & -7x^2 & +4x & +12 \\ -6x^4 & +10x^3 & +x^2 & +0x & -12 \\ \hline 3x^4 & +5x^3 & -6x^2 & +12x & -10 \end{array}$$

4. Si: $P_{(x)} = 4a^2x^3 - 6bx^2 + ax$
$Q_{(x)} = 7a - 8a^2x^3 - 3ax$
$R_{(x)} = 4ax - 2a - 5a^2x^3 - 2bx^2$

efectuar: $P_{(x)} - Q_{(x)} - R_{(x)}$

Resolución:
ordenando y completando:

$$\begin{array}{lcllll} P_{(x)} & = & 4a^2x^3 & -6bx^2 & +ax & +0 \\ Q_{(x)} & = & -8a^2x^3 & +0x^2 & -3ax & +7a \\ R_{(x)} & = & -5a^2x^3 & -2bx^2 & +4ax & -2a \end{array}$$

piden: $P_{(x)} - Q_{(x)} - R_{(x)}$
disponiendo uno debajo de otro:

$$\begin{array}{llll} 4a^2x^3 & -6bx^2 & +ax & +0 \\ 8a^2x^3 & +0x^2 & +3ax & -7a \\ 5a^2x^3 & +2bx^2 & -4ax & +2a \\ \hline 17a^2x^3 & -4bx^2 & +0ax & -5a \end{array}$$

5. Si: $P_{(x)} = x^5 + 2x - 1$
$Q_{(x)} = -8x^3 + 2x^2 - 6x + 2$
$R_{(x)} = 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 6$

hallar: $P_{(x)} - Q_{(x)} + 2R_{(x)}$

Resolución:
ordenando y complentado se tiene:

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +2x & -1 \\ & & 8x^3 & -2x^2 & +6x & -2 \\ & 8x^4 & -4x^3 & +12x^2 & +2x & -12 \\ \hline x^5 & +8x^4 & +4x^2 & +10x^2 & +10x & -15 \end{array}$$

NOTA: Cuando alguno de los polinomios fuese incompleto escribir las potencias que faltan con coeficientes nulos.

Problemas para la clase

Bloque I

Considerando los siguientes polinomios:

$P_{(x)} = 2x^3 - 7x^2 + 5x + 3$
$Q_{(x)} = 5x^2 + 2x - 6$
$R_{(x)} = 7x^4 + x^3 - x^2$
$S_{(x)} = 9x^3 - x + 3$

calcular:

1. $P_{(x)} + Q_{(x)}$

2. $Q_{(x)} + R_{(x)}$

3. $R_{(x)} + S_{(x)}$

4. $P_{(x)} + S_{(x)}$

5. $P_{(x)} + Q_{(x)} + R_{(x)}$

Ahora, considera los siguientes polinomios:

$$A_{(x)} = 3x^2 + 5x - 6$$
$$B_{(x)} = 4x^2 - 11x - 1$$
$$C_{(x)} = 8x^3 - x^2 + 9$$

y determina lo siguiente:

6. $B_{(x)} - A_{(x)}$

7. $C_{(x)} - B_{(x)}$

8. $C_{(x)} - A_{(x)}$

9. $A_{(x)} + B_{(x)} - C_{(x)}$

10. $C_{(x)} - [A_{(x)} - B_{(x)}]$

11. Tomando en cuenta los polinomios anteriores, determina:

$$Q_{(x)} + 2S_{(x)}$$

a) $10x^2 + 9x^3$ b) $23x^5$
c) $5x^2 + 9x^3$ d) $18x^2 + 5x^3$
e) $5x^2 + 18x^3$

12. Tomando en cuenta los polinomios anteriores, determina:

$$5S_{(x)} + A_{(x)}$$

Indicar la suma de coeficientes del resultado.

a) 29 b) 57 c) 49
d) 37 e) 91

Bloque II

Si tenemos los polinomios:

$$M_{(x)} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x + 2$$
$$N_{(x)} = x^3 + x^2 - x + 1$$
$$T_{(x)} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{6}$$
$$U_{(x)} = \frac{2}{5}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 1$$

1. Determinar: $N_{(x)} + 6T_{(x)}$

a) $4x^3 + x^2 - 13x$
b) $4x^3 + x^2 + 13x$
c) $4x^3 - 13x^2 - x$
d) $4x^3 - x^2 - 13x$
e) $4x^3 - 13x^2$

2. Determinar: $15M_{(x)} + 30U_{(x)}$

a) $22x^3 + 27x^2 + 25x$ b) $22x^3 - 27x^2$
c) $25x^3 - 27x^2 + 22x$ d) $25x^3 - 22x^2$
e) $22x^3 - 22x^2$

3. Determinar: $15U_{(x)} + 5N_{(x)}$

a) $11x^3 + 20x^2 + 10$ b) $11x^3 + 20x^2 - 10$
c) $11x^3 - 20x^2 + 10$ d) $11x^3 + 10x^2 - 20$
e) $11x^3 - 10x^2 + 20$

4. Determinar: $6T_{(x)} - 3N_{(x)}$

a) $-[5x^2 + 9x + 4]$ b) $-[5x^2 - 9x - 4]$
c) $-[5x^2 - 9x + 4]$ d) $-[5x^2 + 9x - 4]$
e) $-[5x^2 - 4]$

5. Determinar: $15U_{(x)} - 6N_{(x)}$

a) $9x^2 + 11x - 1$ b) $9x^2 - 11x - 1$
c) $9x^2 + 11x - 21$ d) $9x^2 - x - 21$
e) $9x^2 - 11x + 21$

6. Al efectuar: $M_{(x)} + N_{(x)}$, indicar el menor coeficiente del resultado.

a) -3 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{3}$

d) 3 e) $-\frac{4}{5}$

7. Al efectuar: $N_{(x)} - U_{(x)}$, indicar el mayor coeficiente del resultado.

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) 2
d) 1 e) -1

8. Al efectuar: $M_{(x)} + T_{(x)}$, indicar el mayor coeficiente del resultado.

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6}$ c) $-\frac{8}{15}$

d) -1 e) 0

9. Al efectuar: $U_{(x)} - T_{(x)}$, indicar el menor coeficiente del resultado.

a) $-\frac{5}{6}$ b) $-\frac{1}{10}$ c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{7}{3}$ e) $-\frac{7}{3}$

10. Efectúa: $M_{(x)} + N_{(x)} + T_{(x)}$; indica la suma de coeficientes del resultado.

a) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{52}{15}$
d) -2 e) 3

Bloque III

1. Si: $A = 4a - 5b + 2c - d$
   $B = 3a - 7b + 2c + d$

   hallar: $2A - 2B$

   a) $2(a + 2b - 2d)$ b) $2(a + 2b - 2c)$
   c) $2(a + b + c)$ d) $2(a - b + c)$
   e) $a + b + c$

2. Si: $P_{(x)} = 5x^2 - 4x + 15 - 7x^3$
   $Q_{(x)} = 6x^2 - 4x^3 - 3$

   efectuar: $P_{(x)} - Q_{(x)}$

   a) $- 3x^3 - x^2 - 4x + 16$ b) $- 3x^3 - x^2 - 4x + 18$
   c) $- 3x^3 - x^2 - 4x + 20$ d) $- 3x^3 + x^2 - 4x + 18$
   e) $- 3x^3 - x^2 - 4x + 20$

3. Si: $P_{(x)} = 4x^2 - 5y^2 + x$
   $R_{(x)} = 6x^2 - 3x - (y^2 - x)$

   efectuar: $P_{(x)} - R_{(x)}$

   a) $- 2x^2 - 4y^2 + 3x$ b) $2x^2 + 4y^2 - 3x$
   c) $- 2x^2 - 4y^2 + x$ d) $2x^2 + y^2 + x$
   e) $x^2 + y^2 + x$

4. Si: $P_{(x)} = 5 - 9x + 8x^2 - 7x^3 + 6x^4$
   $Q_{(x)} = - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 9x - 4$

   efectuar: $P_{(x)} + Q_{(x)}$

   a) $x^3 + x^2 + x + 1$ b) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$
   c) $x^4 + x^2 + x + 1$ d) $x^4 - x^3 + x^2 - 1$
   e) $x^2 + x + 1$

5. Si: $P = 5x - 7t + 30$
   $Q = - 10t + x - 4t + 20$
   $R = x - t + x - 11 + 12t$

   hallar: $P - Q - R$

   a) $2x + t - 21$ b) $2x + 4t - 21$
   c) $2x - 4t + 21$ d) $2x - t - 21$
   e) $x + t + 1$

6. Dados los polinomios:
   $P_{(x)} = x^4 + 6x - 1$
   $Q_{(x)} = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6$
   $R_{(x)} = - 4x^3 + x^2 + 6x + 11$

   efectuar: $P_{(x)} - Q_{(x)} - R_{(x)}$

   a) $6(x^3 + 1)$ b) $6(x^3 - 2)$
   c) $6(x^3 - 3)$ d) $6(x^3 + 1)$
   e) $6(x^3 - 18)$

7. Si: $A = x^2 + 6x + 1$
   $B = 3x^2 - 5x + 2$
   $C = 4x^2 - 6x - 1$

   efectuar: $2A - 3B + 5C$

   a) $10x^2 - 3x - 9$ b) $11x^2 - 3x - 9$
   c) $12x^2 - 3x - 5$ d) $13x^2 - 3x - 9$
   e) $14x^2 - 3x - 9$

8. Si: $A_{(x)} = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$
   $B_{(x)} = x^3 + x^2 + 3x - 2$

   efectuar: $6A_{(x)} - 12B_{(x)}$

   a) $- 18x^2 - 18$ b) $- 17x^2 + 27$
   c) $- 17x^2$ d) $- 17x^2 + 17$
   e) $- 18x^2 + 18$

9. Dados los polinomios:

   $A = x^2 + x + 1$
   $B = x^2 - x + 1$
   $C = x^2 - 6$

   efectuar: $A + B - 2C$

   a) 12   b) 14   c) 15
   d) 16   e) 17

10. Si: $P_{(x)} = 7x^3 - 8x^2 - 10$
    $Q_{(x)} = 6x^2 - 5$

    hallar: $P_{(x)} - Q_{(x)}$

    a) $7x^3 - 14x^2 + 5$ b) $7x^2 - 14x + 5$
    c) $7x^2 - 14x - 5$ d) $7x^3 + 14x + 5$
    e) $7x^3 - 14x^2 - 5$

Autoevaluación

1. Si:

$$P_{(x)} = x^2 - x + 1\ ;\ Q_{(x)} = -x^2 + x - 1$$

calcular: $P_{(x)} + Q_{(x)}$

a) $2x^2 - 2x + 2$
b) 0
c) x^2
d) $-x$
e) -1

2. Si:

$$Q_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1\ ;\ R_{(x)} = 5x^3 + 7x$$

calcular: $Q_{(x)} - R_{(x)}$

a) $2x^2 + 1$
b) $-2x^2 - 1$
c) $2x^2$
d) 1
e) $-2x^2$

3. Si:

$$M_{(x)} = 2x^2 - 5x + 4\ ;\ N_{(x)} = 3x^2 - 7x + 6$$

calcular: $3M_{(x)} - 2N_{(x)}$

a) $-x$
b) x
c) x^2
d) $-x^2$
e) 1

4. Indicar verdadero o falso según corresponda:

I. Los términos: $2x^5$; $-3x^5$; $7x^5$ son semejantes.

II. Los términos: $3[x^2]^5$; $\frac{1}{2}x^{10}$: $-7(x^5)^2$ son semejantes.

III. Los términos: $5x^6$; $7[x^2]^3$; $-\frac{1}{2}x^{2^3}$ son semejantes.

a) V V F
b) F F V
c) V V F
d) F V V
e) F V F

5. Si:

$$P_{(x)} = 2x^2 - x + 3\ ;\ Q_{(x)} = 3x^2 - x + 2$$

calcular: $3P_{(x)} - 2Q_{(x)}$

a) $-x$
b) 5
c) $x - 5$
d) $-x + 5$
e) $-x - 5$

Operaciones con polinomios (Multiplicación)

... Aquí una "saludable" historia ...

"En una fiesta se encontraban Xenón, Yamil y Zaida; ellos se encontraban divirtiéndo de lo lindo, cuando de pronto llegaron dos de sus amigos: Ana y Beto

- ¡Hola muchachos! ... - dijeron ellos a sus tres amigos y los saludaron uno por uno dándoles la mano.

Los saludos fueron así: Ana con Xenón; Ana con Yamil, Ana con Zaida; luego: Beto con Xenón, Beto con Yamil, Beto con Zaida.

Pero !! ... ocurrió algo inesperado ..."

¡Aquí paramos un momento! ... interrumpimos la historia y pensemos en esto: ¿Cómo podría ser una multiplicación de polinomios?

Quizás te preguntes "¿y qué tienen que ver los polinomios en esta historia?". Pues aunque no lo creas, una multiplicación de polinomios puede realizarse de manera parecida a los saludos de nuestra historia.

¡¿Cómo?! ... esto es muy fácil.

Imaginemos primero, que la palabra "SALUDO" equivale a "MULTIPLICACIÓN", así tendríamos lo siguiente:

Ana y Beto "saludan a" Xenón, Yamil y Zaida

Será equivalente a: (A + B) . (X + Y + Z)

Los saludos fueron: Ana con Xenón, Ana con Yamil, Ana con Zaida, Beto con Xenón, Beto con Yamil, Beto con Zaida, o equivalente:

$$A . X + A . Y + A . Z + B . X + B . Y + B . Z$$

Luego tenemos:

$$(A + B)(X + Y + Z) = AX + AY + AZ + BX + BY + BZ$$

¡Interesante! ... no es cierto?

Parte teórica

La multiplicación de dos expresiones algebraicas tienen por objeto hallar una tercera expresión llamada producto.

Para mayor sencillez y claridad estudiaremos los diferentes casos que puedan presentarse.

a. Potencias de igual base.- Para multiplicar dos potencias de una misma base, se escribirá la base elevada a la suma de exponentes.

Así:

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

Ejemplos:

* $x^3 . x^5 = x^{3+5} = x^8$
* $(xy^2)(x^2y^3)(x^4y^5) = x^{1+2+4} . y^{2+3+5} = x^7 . y^{10}$
* $(x^2y^3z)(x^4y^5z^4) = x^{2+4}y^{3+5}z^{1+4} = x^6y^8z^5$

b. Multiplicación de monomios.- Se efectúa el producto de los coeficientes y las de potencia de igual base.

Regla de signos:

+	.	+	=	+
+	.	-	=	-
-	.	-	=	+
-	.	+	=	-

Ejemplos:

* $(3x^2y)(-4x^3y) = -12x^{2+3} . y^{1+1} = -12x^5y^2$
* $(-5a^2b)(-6abc^3) = 30a^{2+1} . b^{1+1} . c^3 = 30a^3b^2c^3$
* $(2a^4b^6c^2)(-4a^2bc)(-2a^3b^6c^4) = 16a^{4+2+3}.b^{6+1+6}.c^{2+1+4}$
  $= 16a^9 . b^{13} . c^7$

c. Producto de un polinomio por un monomio.- Se multiplican cada uno de los términos del polinomio por el monomio, sumando los resultados obtenidos.

$$\boxed{(a - b + c - d) . m = am - bm + cm - dm}$$

Ejemplos:

* $(3a^2b - 5ab^2 + 8b^3)(6ab) = 18a^3b^2 - 30a^2b^3 + 48ab^4$
* $(6x^3 - 8x^3y + 4xy^2 - 2y^3)(-3x^2z) =$
  $-18x^5z + 24x^5yz - 12x^3y^2z + 6x^2y^3z$
* Para multiplicar el polinomio $(7ax^3 - 21ab^4 - 3x^2)$ por el monomio $(2a^2b^3x^4)$; se efectuará también tal como se detalla a continuación:

$$\begin{array}{rrr}
7ax^3 & -21ab^4 & -3x^2 \\
 & & 2a^2b^3x^4 \\
\hline
14a^3b^3x^7 & -42a^3b^7x^4 & -6a^2b^3x^6
\end{array}$$

d. Multiplicación de dos polinomios.- Aplicamos la ley distributiva:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

para luego reducir los términos semejantes.

* **Ejemplo**: Multiplicar el binomio $(x - 3)$ por $(x + 7)$

Resolución:

$$(x-3)(x+7) = x(x+7) - 3(x+7)$$
$$= x^2 + 7x - 3x - 21$$

reduciendo términos semejantes:

$$= x^2 + 4x - 21$$

Otra forma es:

$$\begin{array}{l}
x \;\; -3 \quad x \\
\underline{+\;7 \quad x^2 \qquad} \\
-3x \\
\quad 7x - 21 \\
\hline
x^2 + 4x - 21
\end{array}$$

* **Ejemplo**: Multiplicar el trinomio $(2x^2 + 6x - 2)$ por el binomio $(3x - 4)$

Resolución:

$$(2x^2 + 6x - 2)(3x - 4) = 2x^2(3x-4) + 6x(3x-4) - 2(3x-4)$$
$$= 6x^3 - 8x^2 + 18x^2 - 24x - 6x + 8$$

reduciendo términos semejantes:

$$(2x^2 + 6x - 2)(3x - 4) = 6x^3 + 10x^2 - 30x + 8$$

Otra forma:

$$\begin{array}{rrrr}
 & 2x^2 & +6x & -2 \\
 & & 3x & -4 \\
\hline
6x^3 & +18x^2 & -6x & \\
 & -8x^2 & -24x & +8 \\
\hline
6x^3 & +10x^2 & -30x & +8
\end{array}$$

Problemas resueltos

1. Multiplicar x^5 por $(3x^2 - 2x + 1)$

Resolución: tenemos: $x^5 \,.\, (3x^2 - 2x + 1)$

$$= \underbrace{x^5 . 3x^2} - \underbrace{x^5 . 2x} + \underbrace{x^5 . 1}$$
$$= \quad 3x^7 \;-\; 2x^6 \;+\; x^5$$

2. Multiplicar $(x^2 + x^3)$ por $(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$

Resolución: tenemos:

$$(x^2 + x^3) \,.\, (2x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

Luego, multiplicando tenemos:

$$x^2.2x^3 - x^2.x^2 + x^2.2x - x^2.1 + x^3.2x^3 - x^3.x^2 + x^3.2x - x^3.1$$
$$= 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3$$
$$= 2x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x^2$$

3. Efectuar: $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

Resolución:
aplicando la propiedad distributiva:

$$x^2(x^2 - 2xy + y^2) + 2xy(x^2 - 2xy + y^2) + y^2(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + 2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3 + x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$$
$$x^4 + x^2y^2 - 4x^2y^2 + x^2y^2 + y^4$$

finalmente reduciendo términos semejantes se tiene:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

4. Efectuar:
$$(5x^3 - 3x^2 + 6x - 8)(4x^2 - 7x - 9)$$

Resolución:

$$\begin{array}{rrrrrr}
5x^3 & -3x^2 & +6x & -8 & & \\
 & 4x^2 & -7x & -9 & & \\
\hline
20x^5 & -12x^4 & +24x^3 & -32x^2 & & \\
 & -35x^4 & +21x^3 & -42x^2 & +56x & \\
 & & -45x^3 & +27x^2 & -54x & +72 \\
\hline
20x^5 & -47x^4 & +0x^3 & -47x^2 & +2x & +72
\end{array}$$

5. Efectuar:
$$(10x^2 - 2 + 9x^3 + 5x)(3x + 8 + 2x^2)$$

Resolución:
ordenando:

$$(9x^3 + 10x^2 + 5x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$$

luego:

$$\begin{array}{rrrrrr}
9x^3 & +10x^2 & +5x & -2 & & \\
 & 2x^2 & +3x & -8 & & \\
\hline
18x & +20x & +10x & -4x & & \\
 & +27x^4 & +30x^3 & +15x^2 & -6x & \\
 & & -72x^3 & -80x^2 & -40x & +16 \\
\hline
18x^5 & +47x^4 & -32x^3 & -69x^2 & -46x & +16
\end{array}$$

Problemas para la clase

Bloque I

Dados los siguientes polinomios:

$$J_{(x)} = 2x^3 + x^2 - 1$$
$$A_{(x)} = 3x^2 - 5$$
$$I_{(x)} = 2x$$
$$R_{(x)} = 7x^2 - x + 3$$
$$Q_{(x)} = x^2 + x + 1$$

calcular:

1. $I_{(x)} . J_{(x)}$
2. $A_{(x)} . Q_{(x)}$
3. $R_{(x)} . A_{(x)}$
4. $J_{(x)} . R_{(x)}$
5. $I_{(x)} [R_{(x)} + Q_{(x)}]$
6. $I_{(x)} . [R_{(x)} - A_{(x)}]$
7. $I_{(x)} . [J_{(x)} + R_{(x)}]$
8. $[3 . Q_{(x)} - A_{(x)}] . J_{(x)}$
9. $[I_{(x)} . Q_{(x)} - J_{(x)}] + 2R_{(x)}$
10. $R_{(x)} - [I_{(x)} . A_{(x)} - 3J_{(x)}]$
11. $J_{(x)} . A_{(x)} . I_{(x)}$
12. $I_{(x)} . R_{(x)} . Q_{(x)}$

Bloque II

1. Si: $P_{(x)} = x + 5$; $Q_{(x)} = x - 5$, determinar: $[P_{(x)}][Q_{(x)}]$

a) $x^2 + 25$ b) $x^2 - 25$ c) $5x$
d) $- 5x$ e) 0

2. Si: $M_{(x)} = x^2 + x + 1$; $N_{(x)} = x^2 - x + 1$, determinar:

$$[M_{(x)}][N_{(x)}]$$

a) $x^4 - x^2 - 1$ b) $x^4 + x^2 - 1$ c) $x^4 + x^2 + 1$
d) $x^4 - x^2 + 1$ e) $x^4 - 1$

3. Si: $G_{(x)} = 2x^3 - 5$; $D_{(x)} = 2x^3 + 5$, calcular:

$$[G_{(x)}][D_{(x)}]$$

a) $4x^6 - 25$ b) $4x^6 + 25$ c) $4x^6 - 5$
d) $4x^3 - 25$ e) $4x^2 - 25$

4. Sabiendo que: $R_{(x)} = x + 2$; $S_{(x)} = 3x^2 - x + 1$; entonces: $[R_{(x)}] . [S_{(x)}]$ será:

a) $3x^3 - 5x^2 + 2$ b) $5x^3 - 3x^2$
c) $3x^3 + 5x^2 + x - 2$ d) $3x^3 + 5x^2 - x + 2$
e) $3x^2 + x^2 - 2$

5. Si: $P_{(x)} = (x + 1)$; $Q_{(x)} = (x + 2)$; $R_{(x)} = (x - 1)$; determinar el valor de: $[P_{(x)}][Q_{(x)}][R_{(x)}]$

a) $x^3 - x^2 + 1$ b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
c) $x^3 + x^2 - 2$ d) $x^3 - 2x^2 + x + 2$
e) $x^3 - x - 2$

6. Si: $A_{(x)} = x - 3$; $B_{(x)} = x + 2$, y también: $C_{(x)} = x - 6$; $D_{(x)} = x + 1$, calcular:

$$[A_{(x)} . B_{(x)}] - [C_{(x)} . D_{(x)}]$$

a) $- x$ b) $5x$ c) $- 4x$
d) $- 5x$ e) $4x$

7. Siendo: $M_{(x)} = x + 2$; $N_{(x)} = x + 5$
y también: $T_{(x)} = x + 3$; $U_{(x)} = x + 4$
calcular: $[M_{(x)} . N_{(x)}] - [T_{(x)} . U_{(x)}]$

a) x b) $- x$ c) $- 2$
d) 2 e) 0

8. Reducir: $(x + 2)(x^2 - 3x + 1) - x^2(x - 1) + 5(x + 2)$

a) 10 b) 12 c) 8
d) 6 e) 4

9. Simplificar: $(x + 3)(x^2 + x + 1) - 4x(x + 1)$

a) $x^2 + 3$ b) $x^3 - 3$ c) $x^2 - 3$
d) $x + 3$ e) $x^3 + 3$

10. Efectuar: $(x + 1)(x + 2) - x(x + 3)$

a) 2 b) 4 c) 8
d) 10 e) 12

Bloque III

1. Efectuar los productos indicados a continuación:

$(5a^2b^2)$ por $(- 4ab^4)$ = ____________________
$(8ab^2c^5)$ por $(- 5b^5c^{10})$ = ____________________
$(2x^2y)$ por $(- 3y^2z)$ por $(4xy^2z^3)$ = ____________________
$- 3x(- 3x - 4xy^2 + 4z^3)$ = ____________________
$10abcd^3(3a^2b - 3b^2c + 5c^2d^3)$ = ____________________
$- 5xy^2z(- 2x^2yz^2 + 5xy^2z - 4xyz)$ = ____________________

2. Efectuar: $(5x - 4)(5x + 4)$

a) $25x^2 - 16$ b) $25x^2 + 16$ c) $25x^2 - 4$
d) $25x^2 + 1$ e) $5x^2 - 16$

3. Efectuar: $(a^2 - 4a + 4)(a^2 - 2a)$

a) $a^4 - 6a^3 + 6a^2 - 8a$ b) $a^4 - 6a^3 - 8a$
c) $a^4 + 6a^3 + 12a^2 + 8a$ d) $a^4 + 6a^3 - 12a^2 + 8a$
e) $a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 8a$

4. Efectuar: $(x^2 + 3x + 2)$ por $(x^2 + 7x + 12)$

a) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$
b) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 25x + 24$
c) $x^4 + 8x^3 + 35x^2 + 50x + 24$
d) $x^4 + 6x^3 + 33x^2 + 48x + 24$
e) $x^4 + 24$

5. Efectuar: $(x^2 + xy + y^2 - 1)$ por $(x - y)$

a) $x^3 - y^3 - x - y$ b) $x^3 + y^3 + x - 1$
c) $x^3 + y^3 - x - y$ d) $x^3 - y^3 - x + y$
e) $x^3 - y^3 - 1 - x$

6. Efectuar: $(2x - 3)$ por $(7x - 2)$ por $(x + 4)$

a) $14x^3 + 31x^2 - 94x + 24$
b) $14x^3 + 31x^2 - 84x + 12$
c) $14x^3 + 30x^2 - 94x + 24$
d) $14x^3 + 21x^2 - 94x + 24$
e) $14x^3 + 10x^2 - 94x + 24$

7. Efectuar: $(2x)^3 - 3(2x)^2 + 3(2x) - 1$ por $4x^2 + 4x + 1$

a) $32x^5 - 10x^4 + 16x^3 - 8x^2 + 2x - 1$
b) $32x^5 - 16x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 2x - 1$
c) $32x^5 - 1$
d) $32x^5 + 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 2x - 1$
e) $32x^5 - 16x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 2x - 1$

8. Efectuar: $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

a) $x^4 + x^2 + 4$ b) $x^2 + 3x^2 + 4$
c) $x^4 - 5x^2 + 4$ d) $x^4 + 5x^2 + 4$
e) $x^2 + 4$

9. Sea:
$A = a^3 + x^3 + 3ax(a + x)$
$B = (a + x)(a^2 - ax + x^2)$

hallar "A - B"

a) $3a^2x + 3ax^2$ b) $- 3a^2x - 3ax^2$
c) $3a^2x - 3ax^2$ d) $- 3a^2x + 3ax^2$
e) 0

10. Dado:
A: $(x - 5)$ por $(x - 6)$
B: $(x + 8)$ por $(x - 3)$
C: $(x + 20)$ por $(x - 30)$
D: $(x - 14)$ por $(x + 5)$

indicar: $(B - A) - (D - C)$

a) $15x - 584$ b) $15x - 476$
c) $15x + 584$ d) $15x + 476$
e) Ninguna

Autoevaluación

1. Efectuar: $x^2(x^3 - 5) - x^5$

a) $- 5x^2$ b) $5x^2$ c) x^2
d) $- x^2$ e) 0

2. Efectuar: $2x \cdot (x^2 - 3x) + 6x^2$

a) $2x$ b) $2x^2$ c) $2x^3$
d) 2 e) $2x^4$

3. Simplificar: $3x(x + 1) - x(x + 3)$

a) $2x^2$ b) $3x^2$ c) x^2
d) $- 3x^2$ e) - 2

4. Reducir: $7x^2 \cdot (x^5 - 2x^3) + 2(x^7 + 7x^5)$

a) $9x^7$ b) $5x^2$ c) $6x^2$
d) $14x^5$ e) 0

5. Si: $P_{(x)} = 7x^2 + x - 1$; $Q_{(x)} = x^2 + 1$
calcular:
$$[P_{(x)} \cdot Q_{(x)}] - [Q_{(x)} \cdot P_{(x)}]$$

a) $7x^4 + x^3$ b) $x^3 - x^2 + 7x$
c) $7x^5 - x^2 + 9$ d) $14x^4 - 1$
e) 0

NOTAS CURIOSAS

... Y a continuación una PARADOJA ...

Debes recordar que, para calcular la "fracción generatriz" de un decimal periodico, se hacía uso de los "9". Así por ejemplo:

* **$0{,}333... = 0{,}\widehat{3}$**

  su generatriz es: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

  es decir: $0{,}\widehat{3} = \frac{1}{3}$

* **$0{,}171717... = 0{,}\widehat{17} = \frac{17}{99}$**

Ahora observa el siguiente decimal:

$$0{,}999... = 0{,}\widehat{9}$$

¿Cuál es su generatriz?

Veamos: $\frac{9}{9} = 1$, **es decir:** $0{,}\widehat{9} = 1$

Pero $1 \in$ **IN y como** $1 = 0{,}\widehat{9}$**; entonces:** $0{,}\widehat{9} \in$ **IN**

... ¿será cierto esto? ...