

Magnitudes proporcionales



El descubrimiento

Se organiza una expedición arqueológica al Monte Ararat, donde se supone que descansó el arca de Noé después del diluvio y excavando, el jefe de la expedición descubre los cadáveres de un hombre y una mujer desnudos y bien conservados puesto que estaban en la nieve. En cuanto los ve grita a sus compañeros "mirad; son Adán y Eva".

¿Por qué supo que eran precisamente Adán y Eva?

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo el alumno estará en capacidad de:

- Reconocer las magnitudes que nos rodean.
- Establecer las relaciones entre dos o más magnitudes y expresarlas matemáticamente.
- Graficar los valores que toman dos magnitudes.
- Aplicar las propiedades adecuadamente en la resolución de problemas.

Introducción

Todos alguna vez empleamos un razonamiento inductivo que viene asociado a experiencias vividas, por ejemplo decimos: Mientras más alto es un árbol, su sombra será también mayor; si un automóvil lleva una mayor velocidad podrá recorrer mayor distancia en un mismo tiempo o mientras más obreros trabajan en la construcción de una casa se demorarán menos tiempo en terminarlo.

Todos los ejemplos nos hablan de cambios o variaciones de las magnitudes (altura, velocidad, distancia, número de personas, días, etc) que intervienen en una situación. En los dos primeros ejemplos el aumento de una magnitud provocaba el aumento de la otra y en el tercer ejemplo el aumento de una de ellas provocaba la disminución de la otra, cuando ocurren estas situaciones nos encontramos con magnitudes proporcionales.

Magnitud

Es todo aquello que experimenta cambios y puede ser medido. Ejemplo: La sombra de un árbol, la velocidad de un auto, los días trabajados, etc.

Magnitudes proporcionales

Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando al variar una de ellas la otra también varía.

Clases de magnitudes:

* Magnitudes directamente proporcionales (dp)

Ejemplo:

Un alumno llega a una librería pensando comprar seis cuadernos pero consultó por varias opciones y obtuvo los siguientes resultados:

| | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|
| Nº Cuadernos | 3 | 6 | 18 | 9 | 12 |
| Costo (S./.) | 12 | 24 | 72 | 36 | 48 |

Diagrama de relaciones: $3 \xrightarrow{\div 2} 6 \xrightarrow{\times 3} 18$ y $12 \xrightarrow{\div 2} 24 \xrightarrow{\times 3} 72$

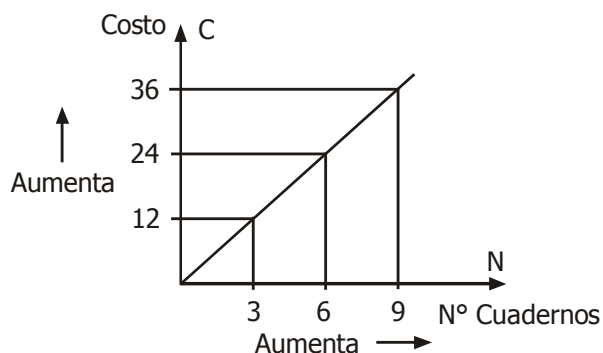
Podemos observar:

- Si se triplica el Nº de cuadernos ($6 \times 3 = 18$) se triplica el costo ($24 \times 3 = 72$).
- Si se reduce a la mitad el número de cuadernos ($6 \div 2 = 3$) el costo también se reduce a la mitad ($24 \div 2 = 12$).
- Si dividimos el Nº cuadernos entre el costo se obtiene una cantidad constante.

$$\frac{\text{Nº cuadernos}}{\text{Costo}} = \frac{N}{C} = \frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{9}{36} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

constante ↙

Graficando:



Obtenemos una recta. La gráfica nos indica que si el número de cuadernos aumenta, también el costo aumenta, y si el número de cuadernos disminuye, el costo disminuye. Podemos concluir que el costo y el número de cuadernos son magnitudes directamente proporcionales.

Definición:

Dos magnitudes son directamente proporcionales (dp) si al aumentar o disminuir una de ellas, el valor de la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. También se cumple que el cociente entre sus valores correspondientes es una cantidad constante.

Es decir, dadas las magnitudes "A" y "B":

$$A \text{ dp } B \rightarrow \frac{A}{B} = \text{Constante}$$

* Magnitudes inversamente proporcionales (i.p.)

Ejemplo:

Un capataz contrata 15 obreros que pueden construir un muro en 10 días, luego de algunos razonamientos elabora la siguiente tabla:

| | | | | |
|------------|----|----|----|----|
| Nº Obreros | 5 | 15 | 30 | 10 |
| Nº Días | 30 | 10 | 5 | 15 |

Diagrama de relaciones: 5 a 15 (+3), 15 a 30 (x2), 30 a 10 (÷3), 10 a 5 (÷2), 15 a 5 (÷3), 5 a 15 (x3).

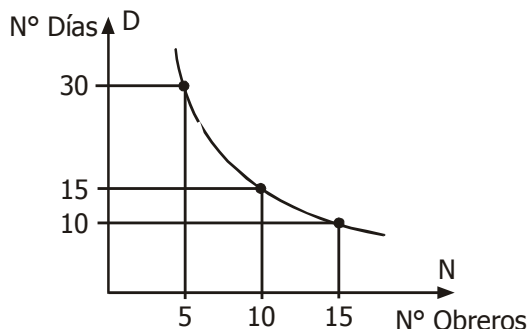
Podemos observar:

- Si duplica el Nº de obreros ($15 \times 2 = 30$) el número de días se reduce a la mitad ($10 \div 2 = 5$).
- Si se reduce a la tercera parte el número de obreros ($15 \div 3 = 5$) el número de días se triplica ($10 \times 3 = 30$).
- El producto del número de obreros y número de días es constante.

$$\begin{aligned} \text{Nº Obreros} \times \text{Nº Días} &= 5 \times 30 = 15 \times 10 = \\ &= 30 \times 5 = 150 \end{aligned}$$

↳ constante

Graficando :



Si unimos los puntos se forma una curva denominada Hipérbola equilátera. Según la gráfica podemos ver que si el número de obreros aumenta, el número de días disminuye, podemos concluir que el Nº Obreros y el número de días son magnitudes inversamente proporcionales.

Definición:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales (i.p.) si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra disminuye en el primer caso o aumenta en el segundo caso en la misma proporción. También se cumple que el producto entre sus valores correspondientes es una cantidad constante.

Es decir dadas las magnitudes "A" y "B":

$$A \text{ ip } B \rightarrow A \cdot B = \text{Constante}$$

Observación:

Si:

A dp B

A ip C

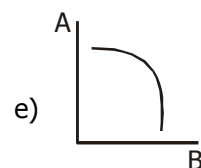
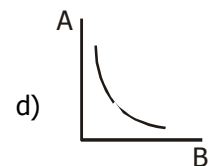
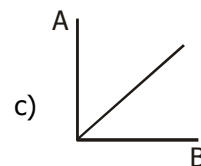
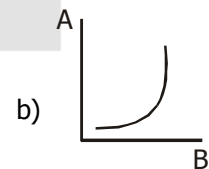
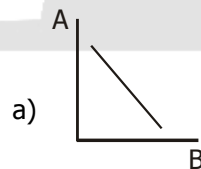
A dp D²

$$\rightarrow \frac{A \cdot C}{B \cdot D^2} = \text{Constante}$$

Problemas para la clase

Nivel I

1. Cuál de las siguientes gráficas muestra dos magnitudes directamente proporcionales.



2. Si "A" es directamente proporcional a "B", hallar "m + p"

| | | | |
|---|----|----|----|
| A | 40 | 32 | P |
| B | m | 8 | 15 |

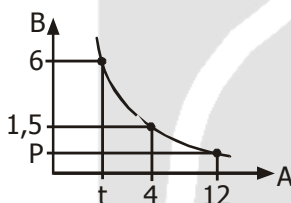
- a) 70 b) 75 c) 60
d) 50 e) 40

3. Sabiendo que "A" es directamente proporcional al cuadrado de "B", hallar "x + y"

| | | | |
|---|-----|---|----|
| A | 100 | Y | 16 |
| B | x | 8 | 2 |

- a) 361 b) 261 c) 69
d) 129 e) 171

4. Luego de construir la gráfica de dos magnitudes ip se obtuvo:



Hallar "P + t"

- a) 2,5 b) 2 c) 1
d) 1,5 e) 0,5

5. Sean las magnitudes "A" y "B" donde \sqrt{A} ip B, cuando: A = 25, B = 8, hallar "B" cuando: A = 16.

- a) 12 b) 10 c) 15
d) 18 e) 20

6. El peso de un elefante es D.P. a la raíz cuadrada de su edad. Si un elefante de 36 años pesa 300 Kg, qué edad tendrá cuando pese 400 Kg.

- a) 38 años b) 40 c) 49
d) 54 e) 64

7. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 50 g cuesta 4 000 dólares, cuánto costará otro diamante que pesa 80 g.

- a) \$10 000 b) 10 240 c) 12 000
d) 12 400 e) 9 800

8. El precio de una revista varía inversamente proporcional con el número de ejemplares producidos y directamente proporcional con el número de días que toma su edición. Si una revista cuesta 20 soles y se imprimieron 3 500 ejemplares demorando su edición 15 días, ¿cuál será el

precio de otra revista de la que se imprimieron 2 000 ejemplares y su edición demoró 18 días?

- a) S/. 30 b) 35 c) 38
d) 42 e) 50

9. Una rueda "A" de 50 dientes engrana con otra rueda "B" de 30 dientes. Si la diferencia entre el número de vueltas que han dado es 1 600, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda "A"?

- a) 2 000 b) 2 400 c) 2 800
d) 3 200 e) 3 600

10. La producción semanal de Jeans en una fábrica es directamente proporcional al número de máquinas que tiene e inversamente proporcional a los años de uso de las mismas. Si una fábrica con 12 máquinas de 4 años de uso cada una produce 900 jeans, ¿cuántas máquinas tiene otra fábrica que tiene 5 años de fundado y produce 600 jeans?

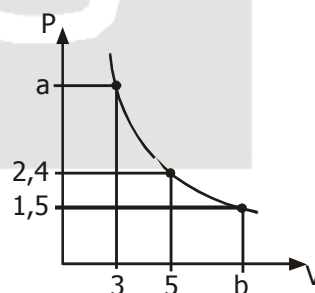
- a) 8 b) 9 c) 10
d) 12 e) 15

Nivel II

1. El peso de un disco metálico es dp al cuadrado de su radio y a su espesor. Si un disco metálico pesa 1 200 gramos, ¿cuánto pesará otro disco del mismo material pero de la mitad de radio y el triple de espesor?

- a) 1 200 g b) 1 000 c) 1 500
d) 900 e) 800

2. Si la siguiente gráfica representa dos magnitudes inversamente proporcionales. Hallar "a + b"



- a) 10 b) 12 c) 14
d) 15 e) 18

3. La energía almacenada en un condensador eléctrico es directamente proporcional al cuadrado de su diferencia de potencial. Si un condensador sometido a una diferencia de potencial de 80 voltios almacena una energía de 40 Joules. ¿Cuál será la diferencia de potencial requerida para que la energía almacenada sea de 62,5 Joules?

- a) 180 V b) 120 c) 150
d) 100 e) 420
4. La potencia de un motor es directamente proporcional a la capacidad del motor e inversamente proporcional a los años de trabajo. Si un motor de 2,5 litros de capacidad y 5 años de uso tiene una potencia de 10 HP. Hallar la capacidad de otro motor que tiene 6 años de antigüedad y 15 HP de potencia.
- a) 4 litros b) 4,5 c) 3,5
d) 5 e) 2
5. La velocidad del agua que atraviesa una tubería es inversamente proporcional a la sección recta de la misma y directamente proporcional al volumen de agua. Si por una tubería de 20 cm² de sección recta circulan 120 m³ a razón de 15 m/s. ¿Cuál será la sección de otra tubería por donde circulan 300 m³ a razón de 20 m/s?
- a) 40 cm² b) 32,5 c) 30
d) 22,5 e) 37,5
6. La potencia consumida por un foco es dp al cubo de la raíz cuadrada del tiempo que está prendido. Si la potencia de un foco es 200 watts, ¿cuál será la potencia de otro foco que se utiliza un tiempo 3 veces mayor?
- a) 1 200 w b) 1 500 c) 1 600
d) 2 000 e) 3 000
7. La magnitud "H" es dp al cuadrado de "T", si "T" aumenta en un tercio su valor, ¿qué sucede con "H"?
- a) Aumenta en 1/9 su valor.
b) Aumenta en 2/9 su valor.
c) Aumenta en 7/9 su valor.
d) Aumenta en 1/4 su valor.
e) Disminuye en 1/9 su valor.
8. La fuerza "F" de atracción entre dos cargas eléctricas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Si cuando están separados 40 cm la fuerza de atracción es 10 Newton, hallar la nueva fuerza de atracción si ahora están separados 8 cm.
- a) 200 N b) 250 c) 300
d) 100 e) 50
9. Si la magnitud "F" es dp al cubo de "T". Completar el siguiente cuadro y dar "m + p".
- | | | | |
|---|---|-----|----|
| F | m | 625 | 40 |
| T | 4 | p | 2 |
- a) 325 b) 165 c) 185
d) 145 e) 75
10. El tiempo que demora un barco en realizar un viaje es dp al cuadrado de su peso e ip a su velocidad. Si un barco

realiza una travesía en 12 días, ¿qué tiempo demora otro barco que pesa 3 veces más que el primero y lleva una velocidad que es 2 veces mayor?

- a) 64 días b) 36 c) 72
d) 27 e) 20

Nivel III

1. Si $f_{(x)}$ es una función de proporcionalidad inversa y se cumple: $f_{(5)} = 30$

Hallar: $\frac{f_{(12)} + f_{(6)}}{f_{(3)}}$

- a) 0,50 b) 0,25 c) 0,75
d) 0,85 e) 1,25

2. El siguiente cuadro muestra los valores de dos magnitudes "A" y "B" que guardan cierta relación de proporcionalidad. Calcular "x + y"

| | | | | |
|---|----|----|----|---|
| A | 15 | x | 45 | 9 |
| B | 36 | 25 | 4 | y |

- a) 124 b) 104 c) 108
d) 118 e) 240

3. Dos magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales para valores de "B" menores o iguales a 12 y son inversamente proporcionales para valores de "B" mayores o iguales a 12. Si "A" es 8 cuando "B" es 2, hallar "A" cuando "B" sea 18.

- a) 16 b) 24 c) 30
d) 32 e) 36

4. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que cuesta 6400 dólares accidentalmente se parte en dos pedazos, uno los 3/5 del otro. ¿Qué pérdida sufrió el diamante?

- a) \$2 000 b) 2 400 c) 2 800
d) 3 000 e) 3 200

5. La velocidad del sonido en el aire es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta del medio ambiente. Si la velocidad del sonido es de 280 m/s a 21°C, ¿cuál será su velocidad a 111°C.

- a) 300 m/s b) 320 c) 360
d) 420 e) 490

6. Un bodeguero hurta en el peso empleando una balanza de brazos desiguales que miden 25 cm y 28 cm. Una señora compra 7 kg de arroz y el bodeguero coloca las pesas sobre el platillo correspondiente al brazo mas

corto. La señora desconfiada compra otros 7 kg de arroz y obliga al bodeguero a poner las pesas en el otro platillo. La señora realmente cuántos kilogramos se llevó?

- a) 14 b) 14,2 c) 14,02
d) 14,09 e) 15,2

7. Si la magnitud "B" es directamente proporcional a A^2 y "C" es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de "B", si "C" disminuye en 20%, en que porcentaje aumento "A".

- a) 15% b) 20 c) 25
d) 28 e) 30

8. En una empresa tienen el siguiente criterio para fijar el sueldo de un empleado: El sueldo es dp al cuadrado de la edad y a los años de servicio. Si Juan que tiene 30 años de edad y la sexta parte de su edad trabajando en la empresa, tiene un sueldo de 3 600 soles. ¿Cuál será la edad de Carlos si entró un año después de Juan y gana 3 920 soles?

- a) 32 años b) 33 c) 34
d) 35 e) N.A.

9. Un rueda "A" de 80 dientes, engrana con otra "B" de 50 dientes, fija al eje de "B" hay otra rueda "C", de 15 dientes, que engrana con una cuarta rueda "D" de 40 dientes. Dando la rueda "A" 120 vueltas por minuto, ¿cuánto tiempo tardará la rueda "D" en dar 18 000 revoluciones?

- a) 25 min b) 250 c) 125
d) 50 e) N.A.

10. La deformación producida en un resorte al aplicarle una fuerza es directamente proporcional a dicha fuerza (Ley de Hooke). Si a un resorte de 40 cm de longitud se le aplica una fuerza de 260 N, su nueva longitud sería 45 cm. ¿Qué fuerza se debe aplicar para que su nueva longitud sea 48 cm?

- a) 382 N b) 416 c) 364
d) 482 e) 500

Autoevaluación

1. La magnitud A es ip a B^2 . Las variaciones de A y B están dadas en la siguiente tabla de valores:

| | | | | |
|---|----|-----|---|---|
| A | 3a | 144 | c | 9 |
| B | 6 | b | 2 | a |

Hallar "a + b + c"

- a) 15 b) 12 c) 339
d) 335 e) 340

2. Si A es dp a B y cuando : $A = a$; $B = b$ y si A aumenta una unidad, B lo hace en dos. Entonces el valor de la constante de proporcionalidad es:

- a) 1/2 b) 1/3 c) 2
d) 4 e) 1/4

3. El área lateral de un sólido geométrico es directamente proporcional a su apotema y al perímetro de la base. Si el área es 600 m^2 , cuando el apotema es 5 m y el perímetro de la base 12 m. Hallar el área cuando el apotema es 0,5 m y el perímetro de la base 100 m.

- a) $1\ 000 \text{ m}^2$ b) 500 c) 50
d) 250 e) $2\ 500$

4. Se sabe que una magnitud A es ip a B^2 . Hallar el valor de A, sabiendo que si disminuye en 36 unidades el valor de B varía en un 25%.

- a) 60 b) 48 c) 100
d) 150 e) 64

5. Si $(x + 2)$ varía proporcionalmente con $(y - 3)$, además si cuando : $x = 10$; entonces: $y = 19$. Hallar el valor de "x", si: $y = 31$

- a) 21 b) 23 c) 20
d) 19 e) 18

