Relaciones binarias I

Dos hombres juegan un partido de tenis al mejor de cinco sets, cuando terminan el partido ambos han ganado tres sets.
¿Cómo puede ser esto?

Par ordenado

Al conjunto formado por "a" y "b" en ese orden y denotado por (a; b), se le llama **par ordenado**, siendo "a" primera componente y "b" segunda componente.

Por ejemplo, si se decidiera indicar el número de orden de cada alumno de la clase por medio de un par ordenado tendríamos:

(Carlos Alvarado; 1)
(Miguel Díaz; 2)
(José Escalante; 3), y así sucesivamente

Dos pares ordenados son iguales, sólo si sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes también, es decir:

$$(a; b) = (m; n) \Leftrightarrow a = m \ \text{ y } \ b = n$$

Producto cartesiano

Cartesiano "A x B", al conjunto de todos los pares ordenados (a; b), donde que "a" pertenece a "A" y "b" pertenece a "B".

Es decir:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \ \text{ y } \ b \in B\}$$

Por ejemplo, sea:

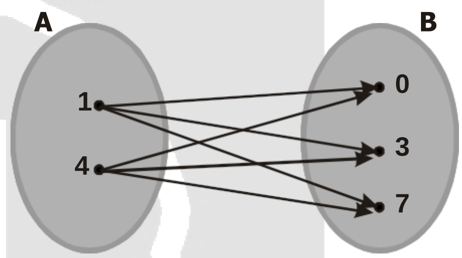
$$A = \{1; 2; 3\}$$
$$B = \{a, b\}$$
$$\Rightarrow A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$$

Representación gráfica del producto cartesiano

El producto cartesiano "A x B", se puede representar mediante ciertos gráficos o esquemas, los más utilizados son:

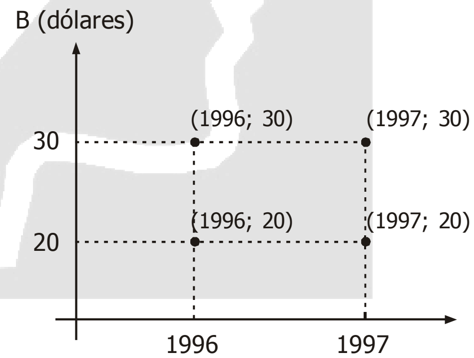
A. Diagrama sagital o de flechas:

Sea: A = {1; 4} y B = {0; 3; 7}



B. Diagrama cartesiano:

Sea: A = {1996; 1997} y B = {20 \$; 30 \$}



Observación

El número de elementos del producto cartesiano "A x B" se deduce de la siguiente relación:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

Relación binaria

Dados dos conjuntos "A" y "B", se llama relación "R" de "A" en "B", a aquel subconjunto del producto cartesiano "A x B" que cumple determinada condición entre los elementos de sus pares ordenados.

Por ejemplo, sean los conjuntos:

$$A = \{1; 3; 5\} \text{ y } B = \{2; 4\}$$

donde el producto cartesiano "A x B" es:

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 4), (3; 2), (3; 4), (5; 2), (5; 4)\}$$

Si (a; b) representa a todos estos pares ordenados, procedemos a extraer aquellos que cumplen: a > b.

Entonces tendremos la siguiente relación:

$$R = \{(3; 2), (5; 2), (5; 4)\}$$

que se puede determinar como:

$$R = \{(a; b) \in A \times B / a > b\}$$

Observamos que en nuestra relación: a > b, es la condición o **regla de correspondencia**, hay que tener presente que se nos pudo haber pedido otra regla de correspondencia, por ejemplo:

$$a < b \quad \rightarrow \quad R_1 = \{(1; 2), (1; 4), (3; 4)\}$$
$$a = b - 1 \quad \rightarrow \quad R_2 = \{(1; 2), (3; 4)\}$$

Dominio y rango de una relación

Llamamos **dominio** de una relación, al conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados de dicha relación.

Llamamos **rango** de una relación al conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares ordenados de dicha relación.

Por ejemplo: $R = \{(1; 2), (1; 4), (3; 7)\}$

$$\text{Dominio de } R = D_{(R)} = \{1; 3\}$$
$$\text{Rango de } R = R_{(R)} = \{2; 4; 7\}$$

Problemas para la clase

Bloque I

1. Escribe V o F entre los paréntesis según cada proposición sea verdadera o falsa.

I. {2; 5} = {5; 2} ....( )
II. {4; 3} ≠ {3; 4} ....( )
III. (3; 4) = (4; 3) ....( )
IV. (a; b) = (a; b) ....( )
V. (5; 2) ≠ (2; 5) ....( )
VI. (a; a) ≠ (a; a) ....( )

2. Halla "x" e "y", según sea el caso, para que se cumpla la igualdad de pares ordenados.

I. (x; 2) = (5; 2)
II. (10; -y) = (10; -5)
III. (x + 2; y) = (5; 1)
IV. (1; -3) = (-y; x - 3)
V. $(5x; 4) = \left(20; \frac{12}{y}\right)$

3. Sean los conjuntos: D = {-1; 1; 0} y E = {1; 3; 5}; hallar:

I. $D \times E$ II. $E \times D$
III. $D \times D$ IV. $E \times E$
V. $(D - E) \times (D \cap E)$

4. Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda; respecto a una relación "R" definida de "A" en "B".

I. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ ....( )
II. n(Rango) = n(Dominio) ....( )
III. $R \subset A \times B$ ....( )
IV. Dom(R) = A ....( )
V. Ran(R) = A ....( )

5. Sean los conjuntos: A = {12; 8; 5} y B = {2; 3; 4; 5} y la relación "R": $A \rightarrow B$, definida por "... es múltiplo de ..."

I. Elabora un diagrama sagital y un diagrama cartesiano.
II. Determina "R" por extensión.
III. Halla el Dom(R) y Ran(R).

6. Sean los conjuntos: A = {2; 4; 5} y B = {3; 4}, y la relación R: $A \rightarrow B$, definida por "...es mayor que ...".

I. Elabora un diagrama sagital y un diagrama cartesiano.
II. Determina "R" por extensión.
III. Halla Dom(R) y Ran (R).

7. Tienes los conjuntos: A = {2; 3; 5} y B = {4; 6; 11} y la relación R: A $\rightarrow$ B, definida por "... es primo relativo con ..."

   I. Elabora una diagrama sagital y un diagrama cartesiano.
   II. Determina "R" por extensión.
   III. Hallar Dom(R) y Ran (R).

8. Dado: A = {1; 3; 5; 7}, B = {2; 4; 6; 8} y la relación: R = {(a; b) $\in$ A x B/ab es múltiplo de 3}; hallar:

   I. Conjunto de partida de "R".
   II. Conjunto de llegada de "R".
   III. "R" por extensión.
   IV. Dominio de R.
   V. Rango de R.

9. Dados los conjuntos:
   A = {1; 2; 5}, B = {4; 5; 6} y C = {1; 2; 3; 4}

   Hallar: (B - C) x (A $\cap$ B)

10. Sea: A = {1; 2; 3; 4; 5}, B = {6; 7; 8} y las relaciones de "A" en "B":

    R = {(1; 6), (2; 6), (3; 7), (4; 7)}
    S = {(3; 7), (4; 7), (5; 8)}

    Indicar verdadero (V) o falso (F) en:

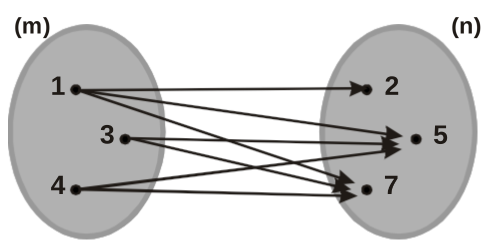
    I. Dom (R $\cap$ S) = Dom(R) $\cap$ Dom(S)
    II. Dom(R - S) = Dom(R) - Dom(S)
    III. Ran(R $\cap$ S) = Ran(R) $\cap$ Ran(S)
    IV. Ran(R - S) = Ran(R) - Ran(S)
    V. Dom(R $\cup$ S) $\neq$ Dom(R) $\cup$ Dom(S)

Bloque II

1. Hallar "a + b"; si se cumple que:

$$(2a + b; 3a - 2b) = (9; 3)$$

2. En el diagrama sagital, cual es la regla de correspondencia:



   a) m $\leq$ n
   b) m = n
   c) m + 1 = n
   d) m < n
   e) Más de una es correcta

3. Dados: C = {0; 1; 3; 5; 6}, D = {1; 2; 3; 4} y la relación: R = {(c; d) $\in$ C x D/(c + d) es primo}; hallar:

   I. "R" por extensión
   II. Dominio y Rango de R.

4. Sean: T = {-2; 0; 2; 4}, U = {2; 3; 4} y la relación: R = {(t; u) $\in$ T x U/(t + u) es par}; hallar:

   I. "R" por extensión.
   II. Dominio de R
   III. Rango de R
   IV. Dom(R) x Ran(R)

5. Sean los conjuntos:
   A = {1; 2; 5}, B = {3; 4; 6; 8; 10}
   y la relación: R = {(a; b) $\in$ A x B/b - a $\geq$ 5},

   a) Determina R por extensión
   b) Dom(R) $\cup$ Ran(R)

6. Sean los conjuntos: A = {2; 4; 5} y B = {3; 4} y la relación: R = {(x; y) $\in$ A x B/x > y}.
   Elabora un diagrama sagital y un diagrama cartesiano.

7. Dados los conjuntos: A = {12; 8; 5} y B = {2; 3; 4; 5} y la relación R: A $\rightarrow$ B definida por:

   R = {(x; y) $\in$ A x B/"x" es múltiplo de "y"}
   Determina "R" por extensión.

8. Dados los conjuntos: A = {-4; 0; 2} y B = {2; 3; 4; 5} y la relación:
   R = {(x; y) $\in$ A x B/x^2 + y $\leq$ 11}
   ¿Cuáles son los elementos de "R"?

9. Dados los conjuntos: A = {3; 5; 8} y B = {2; 3; 4; 5}
   Determina las siguientes relaciones:

   R_1 = {(a; b) $\in$ A x B/a > b}
   R_2 = {(a; b) $\in$ A x B/a = b}

10. Dados los conjuntos: A = {1; 2; 3; 4; 5} y B = {3; 5; 7} y una relación definida por:

$$R = \{(a; b) \in A \times B/a + b = 8\}$$

    a) Determina "R" por extensión
    b) Hallar: Dom (R) $\cap$ Ran(R)

Bloque III

1. Si los pares ordenados: (2a + 2; 14), (10; b^2 - 2) son iguales. Hallar "a + b"

2. Dados los conjuntos: A = {1; 2; 3; 4}, B = {2; 5; 6}.
   Hallar las siguientes relaciones; indicando su dominio, rango y gráfica:

   R_1 = {(a; b) $\in$ A x B/a + b < 10}
   R_2 = {(a; b) $\in$ A x B/b = a + 3}

3. Dados los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{2; 5; 6\}$. Calcula las siguientes relaciones indicando su dominio, rango y gráfica:

$R_1 = \{(a; b) \in A \times B / a = b\}$
$R_2 = \{(a; b) \in A \times B / b - a \leq 2\}$

4. Si: $A = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, $B = \{-5; -1; 3; 5\}$,

$R = \{(a; b) \in A \times B / a^2 - b > 9\}$
$S = \{(a; b) \in A \times B / a \cdot b \geq 12\}$, hallar:

I. $R \cup S$ II. $R \cap S$
III. $S - R$ IV. $R - S$

5. Dados los conjuntos:

$A = \{-3; -2; 0; 1\}$, $B = \{-1; 0; 1\}$ y
$R = \{(a; b) \in A \times B / a + b \neq a;\ a + b < 0\}$;

I. Determina "R" por extensión
II. Hallar Dom(R) y Ran(R)

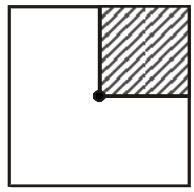
6. Sean: $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 4\}$ y la relación: $R = \{(a; b) \in A \times B / 2^a = b\}$

I. Determina "R" por extensión
II. Hallar: $n[Dom(R)] + n[Ran(R)]$

Relaciones binarias II

Un padre al morir deja por herencia un terreno cuadrado, correspondiéndole la cuarta parte a la esposa (según el gráfico), el resto será repartido entre sus cuatro hijos en partes de igual forma y tamaño ...

¿Es posible esto?



Relación definida en un conjunto

Si en "A × B", el conjunto "B" es igual al conjunto "A", entonces tendríamos "A × A", por ejemplo: Dado el conjunto A = {1; 3; 5}, ¿cuál es la relación "R" de "A" en "A" definida por la relación: a - b = 2?

Paso 1: Se halla el producto cartesiano "A × A".

A x A = {(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)}

Paso 2: Extraemos aquellos que cumplen: a - b = 2.

R = {(3; 1), (5; 3)}

Propiedades de una relación definida en un conjunto

1. **Propiedad reflexiva:** Una relación "R" en "A" es **reflexiva**, si todo elemento del conjunto "A" está relacionado consigo mismo por la relación "R". Por ejemplo:

   Dado el conjunto: A = {1; 2; 3}

   Hallar:

   R = {(a; b) ∈ A × A/ a = b} = {(1; 1), (2; 2), (3; 3)}

   Donde se observa que cada elemento del conjunto "A" está relacionado consigo mismo, entonces "R" es **reflexiva**.

2. **Propiedad simétrica:** Una relación "R" en "A" es **simétrica**, si siempre que un elemento de "A" está relacionado por "R" con otro, también éste está relacionado por "R" con el primero. Por ejemplo:

   Dado el conjunto: A = {1; 2; 3}

   Hallar:

   R = {(a; b)∈A x A/ a + b = 4} = {(1; 3), (2; 2), (3; 1)}

   Donde se observa que:

   1 está relacionado con 3 y 3 está relacionado con 1.
   2 está relacionado con 2 y 2 está relacionado con 2.
   entonces R es simétrica.

3. **Propiedad transitiva:** Una relación "R" en "A" es **transitiva**, si siempre que un elemento del conjunto "A" está relacionado con otro, y éste relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado por "R" con el tercero. Por ejemplo:

   Dado el conjunto: A = {1; 2; 3}

   Hallar:

   R = {(a; b)∈ AxA/ a < b} = {(1; 2), (1; 3), (2; 3)}

   Donde se observa que:

   1 R 2 y 2 R 3, entonces 1 R 3

   Entonces R es transitiva.

4. **Relación de equivalencia:** Una relación es de equivalencia, si es a la vez reflexiva, simétrica y transitiva. Por ejemplo:

   Dado el conjunto: A = {3; 4; 5}

   Hallar: R = {(a; b) ∈ A× A/ a = b ó a + b = 7}
   R = {(3; 3), (3; 4), (4; 3), (4; 4), (5; 5)}

   Donde se observa que:

   3 R 3; 4 R 4; 5 R 5, entonces es **reflexiva**.
   3 R 4 y 4 R 3, entonces es **simétrica**.
   3 R 4 y 4 R 3, entonces 3 R 3, por lo tanto es **transitiva**.

   finalmente diremos que esta relación es de **equivalencia**.

Problemas para la clase

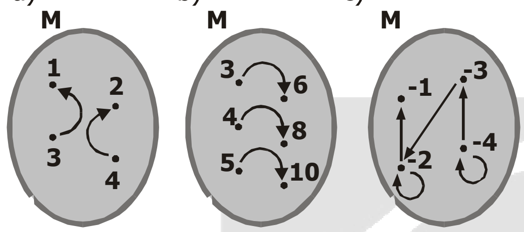
Bloque I

1. Si: $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 3\}$ y
   $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$

   Hallar: I. $A \times A$ II. $A \times B$
   III. $B \times A$ IV. $B \times B$

2. Determina por extensión cada relación de "M" en "M" (relación en "M") definida en los siguientes diagramas:

   a) b) c)



3. Sea: $C = \{-2; -1; 0\}$ y la relación "R" definida en "C" por: $aRb \leftrightarrow a \,.\, b < 4$, determina "R" por extensión y elabora un diagrama sagital.

4. Si: $A = \{-5; 3\}$, ¿cuáles son relaciones de "A" en "A" y cuáles no? ¿Por qué?

   a) $R = \{(-5; -5), (3; 3), (-5; 3)\}$
   b) $S = \{(-5; 5), (-5; 3), (3; -5), (3; 3)\}$
   c) $T = \{(3; -5), (-5; 3)\}$

   Elabora un diagrama sagital para cada relación en "A".

5. Sea: $A = \{a \in \mathbb{N} / 4 \geq a\}$ y la relación "R":
   $R = \{(a; b) \in A^2 / a = b$ ó $a + b = 4\}$,
   halla el número de elementos de "R".

6. Dado: $C = \{c \in \mathbb{N} /$ "c" es primo; $c < 17\}$ y las siguientes relaciones definidas en "C":

   $R = \{(a; b) \in C \times C / a^2 + b^2 \leq 74\}$
   $S = \{(x; y) \in C \times C / x.y \leq 65\}$

   Halla: $Dom(R) \cap Dom(S)$

7. Si: $A = \{1; 2; 3\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas y cuáles no? ¿Por qué?

   $R_1 = \{(1; 2), (3; 2), (2; 2), (2; 3)\}$
   $R_2 = \{(1; 2), (2; 3), (1; 3)\}$
   $R_3 = \{(1; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3)\}$
   $R_4 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 3)\}$

8. Si: $S = \{x/$"x" es vocal de la palabra "valencia"$\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son simétricas en "S" y cuáles no? ¿Por qué?

   $R_1 = \{(a; e), (a; i), (e; i), (e; a), (i; e)\}$
   $R_2 = \{(a; a), (i; i), (e; e)\}$
   $R_3 = \{(a; a), (a; e), (e; e), (i; i), (e; a)\}$
   $R_4 = \{(i; a), (e; e), (a; i)\}$

9. Si: $D = \{x \in \mathbb{N}/$"x" es primo; $x < 8\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son transitivas en "D" y cuáles no? ¿Por qué?

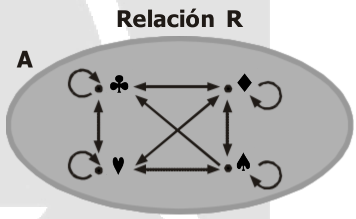
   $R_1 = \{(2; 3), (3; 3)\}$
   $R_2 = \{(2; 3), (3; 3), (3; 5), (5; 7)\}$
   $R_3 = \{(3; 7), (3; 2), (7; 2), (2; 5), (3; 5), (7; 5)\}$
   $R_4 = \{(7; 7)\}$

10. Si: $A = \{1; 2; 3; 4\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia en "A"?

    $R_1 = \{(2; 2), (3; 3), (2; 3), (1; 1), (3; 2)\}$
    $R_2 = \{(a; b) \in A \times A / a - b = 1\}$
    $R_3 = \{(4; 4), (4; 1), (1; 1), (1; 2), (1; 4), (4; 2), (2; 2), (2; 4), (2; 1), (3; 3)\}$
    d) $R_4 = \{(a; b) \in A \times A/$"a" es divisor de "b"$\}$
    e) $R_5 = \{(a; b) \in A^2/$"a" es múltiplo de "b"$\}$

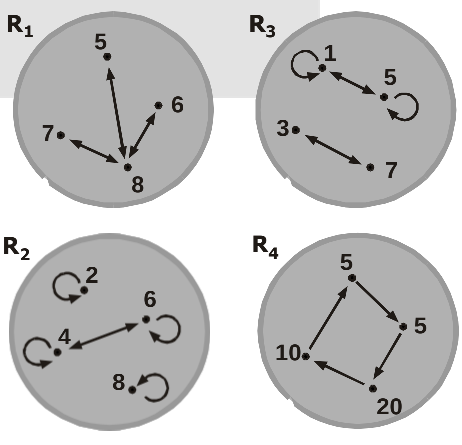
Bloque II

1. Analiza el diagrama sagital de la relación $R: A \to A$, e indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:



   I. "A" tiene 4 elementos .... ( )
   II. "R" tiene 16 elementos .... ( )
   III. R es simétrica .... ( )
   IV. R es reflexiva .... ( )
   V. R es transitiva .... ( )

2. Dadas las siguientes relaciones:



   Indicar verdadero o falso según corresponda:

   I. R_1 es reflexiva .... ( )
   II. R_2 es simétrica .... ( )
   III. R_3 es simétrica .... ( )
   III. R_2 y R_4 son transitivas .... ( )
   IV. R_1 y R_4 son de equivalencia .... ( )

3. Sea el conjunto: $U = \{1; 2; 3; 4\}$
Calcular las siguientes relaciones; indicando su dominio, rango y gráfica:

$R_1 = \{(x; y) \in U \times U / y = x\}$
$R_2 = \{(x; y) \in U \times U / x + y = 5\}$

4. Sea el conjunto: $U = \{1; 2; 3; 4\}$
Calcular las siguientes relaciones; indicando su dominio, rango y gráfica:

$R_1 = \{(x; y) \in U \times U / x = 2\}$
$R_2 = \{(x; y) \in U \times U / y = 3\}$

5. Sea el conjunto: $U = \{1; 2; 3; 4\}$
Calcular las siguientes relaciones; indicando su dominio, rango y gráfica:

$R_1 = \{(x; y) \in U \times U / y < x\}$
$R_2 = \{(x; y) \in U \times U / y \geq x\}$

6. Si: $B = \{x \in \mathbb{N} / 6 \leq x < 9\}$ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos representan relaciones de "B" en "B"? ¿Por qué?

$R = \{(6; y) \in \mathbb{N}^2 / y = 6 \text{ ó } y = 7\}$
$S = \{(x; 8) \in \mathbb{N}^2 / x - 1 = 8\}$
$T = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / 7 < x < 9 \wedge 0 < x - y \leq 2\}$

Haz un diagrama cartesiano para cada relación en "B".

7. Determina el número de elementos de la relación:

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + y^2 = 25\}$$

8. Determina el número de elementos de la relación:

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + y^2 = 36\}$$

9. Sea: $A = \{2; 3; 5; 8; 10; 12\}$ y las siguientes relaciones:

$R_1 = \{(a; b) \in A^2 / \text{"a" es par y "b" es múltiplo de "a"}\}$

$$R_2 = \left\{(a; b) \in A^2 / b = \frac{a}{2} - 1\right\}$$

Halla: $n(R_1) - n(R_2)$

10. Dado: $A = \{2; 4; 6\}$, se define la relación de equivalencia:
$R = \{(2; 2), (2; 4), (4; 6), (2; x), (4; 4), (4; 2), (6; 6), (6; 2), (6; y)\}$

Halla "$x + y$"

Bloque III

1. Dado el conjunto: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
¿Cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas?

$R_1 = \{(1; 1), (2; 2), (4; 4)\}$
$R_2 = \{(1; 1), (3; 3), (4; 4)\}$
$R_3 = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$

a) Todas b) Sólo R_1 c) Sólo R_2
d) Sólo R_3 e) R_1 y R_3

2. Sea la relación "R" definida en los números naturales por:
$$R = \{(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + 2b = 10\}$$

Hallar: $Dom(R) \cap Ran(R)$

a) $\{4\}$ b) $\{2; 4\}$ c) $\{0; 2; 4\}$
d) $\{0; 2\}$ e) $\{4; 6\}$

3. Sea la relación "R" definida en "A", donde:
$A = \{1; 2; 3\}$
$R = \{(1; 1), (2; 2), (1; 2), (2; 1), (3; 3), (3; 1), (1; 3)\}$

Afirmamos:

I. "R" es reflexiva.
II. "R" es simétrica.
III. "R" es transitiva.

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) I y II e) Todas

4. Si: $M = \{2; 3; 4\}$, hallar "n(R)", si:
$R = \{(x; y) \in M^2 / x + y \leq 6\}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

5. Dado: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ y las relaciones:

$R_1 = \{(a; b) \in A^2 / a - b = 0\}$
$R_2 = \{(a; b) \in A^2 / a^2 - b = 0\}$
$R_3 = \{(a; b) \in A^2 / a + b = 5\}$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

I. R_1 es reflexiva .... ( )
II. R_2 es transitiva .... ( )
III. R_3 es simétrica .... ( )
IV. R_1 es de equivalencia .... ( )

6. Sea: $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y las siguientes relaciones:

$R_1 = \{(a; b) \in M^2 / a + b = 6\}$
$R_2 = \{(a; b) \in M^2 / b \geq a\}$
$R_3 = \{(a; b) \in M^2 / \text{"a - b" es múltiplo natural de 2}\}$

Marca con "√" o un "×" en cada casillero, según las relaciones que cumplan o no las propiedades respectivas.

Relación	Reflexiva	Simétrica	Transitiva