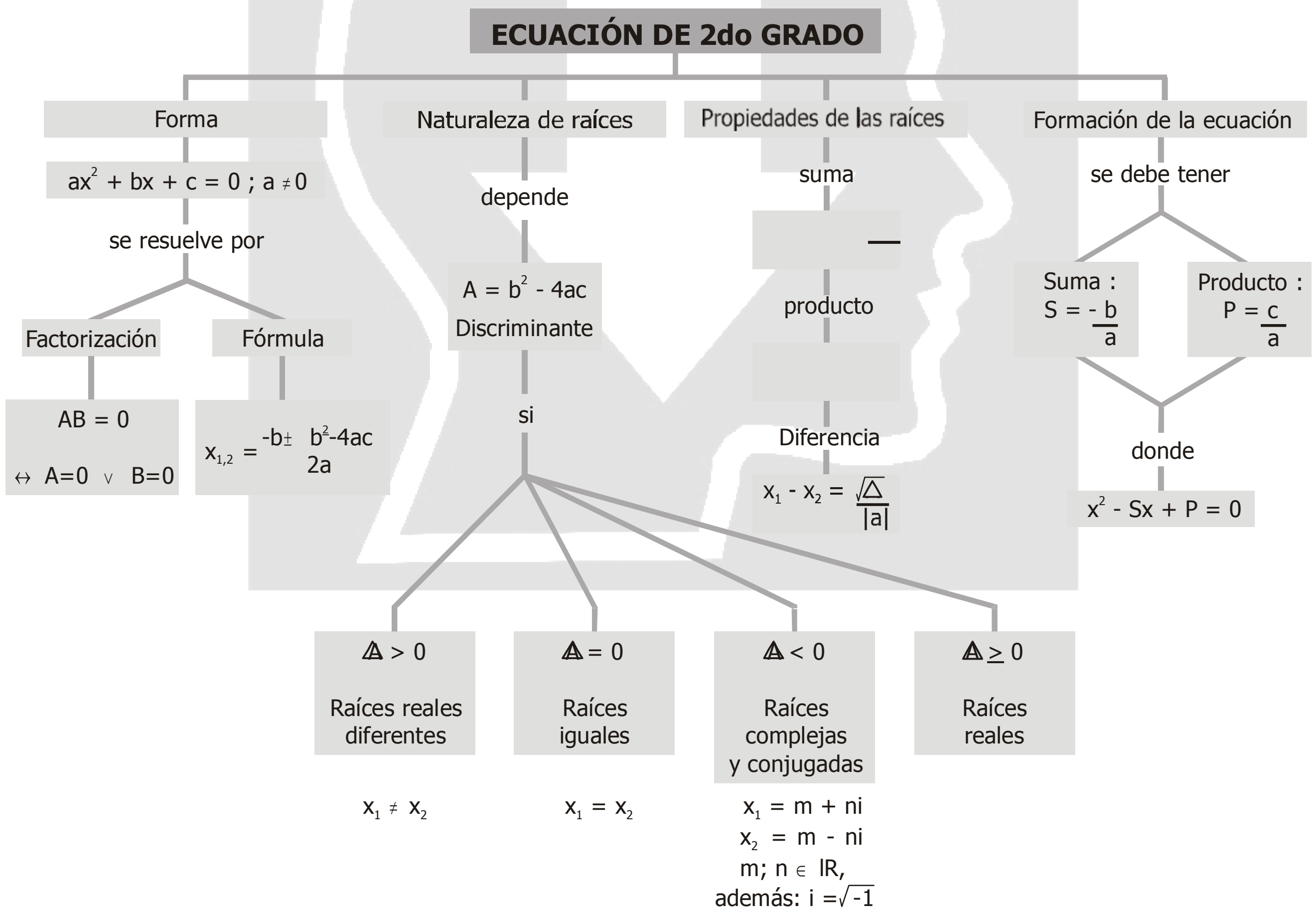
# *Ecuaciones de segundo Grado*

**Fracaso y éxito**

El fracaso tiene mil excusas, el éxito no requiere explicación. Cada vez que no logramos algo siempre tenemos una magnífica disculpa; el mediocre busca instintivamente una justificación para su fracaso y, por supuesto, siempre juega el papel de víctima.
El triunfador es siempre una parte de la respuesta; el perdedor es siempre una parte del problema.
El triunfador dice: "Podemos hacerlo"; el perdedor dice: "Ése no es mi problema".
El triunfador siempre tiene un programa; el perdedor siempre tiene una excusa.
El triunfador ve siempre una respuesta para cualquier problema; el perdedor ve siempre un problema en toda respuesta.
El triunfador ve una oportunidad cerca de cada obstáculo; el perdedor ve de dos a tres obstáculos cerca de cada oportunidad.
El triunfador dice: "Quizá es difícil, pero es posible"; el perdedor dice: "Puede ser posible, pero es demasiado difícil".



## OBSERVACIONES

**Operaciones con raíces**

suma de inversas

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

suma de cuadrados

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

suma de cubos

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

suma, producto y diferencia

$$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2$$

**Raíces simétricas u opuestas**

si

se cumple

$$x_1+x_2=0$$

**Raíces recíprocas o inversas**

si

se cumple

$$x_1x_2=1$$

**Ecuaciones cuadráticas equivalentes**

si las ecuaciones

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$$
$$mx^2+nx+p=0\ ;\ m\neq 0$$

tienen

las mismas raíces o soluciones

se cumple

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

## Teorema:
**(Raíces irracionales conjugadas)**

Sea la ecuación: $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$ de raíces "$x_1$" $\wedge$ "$x_2$"; donde $(a; b; c) \in \mathbb{Q}$ (coeficientes racionales).

Si: $x_1 = m+\sqrt{n}$ es una raíz irracional, entonces: $x_2 = m-\sqrt{n}$ es la otra raíz irracional conjugada.

$$\therefore\ C.S.=\{m+\sqrt{n}\ ;\ m-\sqrt{n}\}$$

## Teorema:
**(Raíces complejas conjugadas)**

Sea la ecuación : $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$ de raíces "$x_1$" $\wedge$ "$x_2$" ; donde $(a; b; c) \in \mathbb{R}$.

Si: $x_1 = m+ni$ es una raíz compleja, entonces: $x_2 = m-ni$; es la otra raíz compleja conjugada.

$$C.S.=\{m+ni\ ;\ m-ni\}\ m;\ n\in\mathbb{R}.$$

## Problemas resueltos

1. Resolver:
$$2abx^2-(b^2+6a^2)x+3ab=0;\ ab\neq 0$$

Solución:

Aplicando aspa simple:

$$2abx^2-(b^2+6a^2)x+3ab=0$$

$$\begin{array}{ccccc} 2ax & & -b & \rightarrow & -b^2x \\ bx & & -3a & \rightarrow & -6a^2x \\ & & & & -(b^2+6a^2)x \end{array}$$

Luego :

$$(2ax-b)(bx-3a)=0$$
$$2ax-b=0\ \vee\ bx-3a=0$$
$$x=\frac{b}{2a}\ \vee\ x=\frac{3a}{b}$$
$$C.S.=\left\{\frac{b}{2a};\frac{3a}{b}\right\}$$

2. Calcular los valores de "m" que hacen que la ecuación: $2x^2-mx+(m+6)=0$ ; tenga raíces iguales.

Solución:

Las raíces de la ecuación serán iguales, si el discriminante:

$$\Delta=b^2-4ac=0\ ......(\alpha)$$

De la ecuación : $\begin{cases} a=2 \\ b=-m \\ c=m+6 \end{cases}$

Reemplazando en ($\alpha$):

$$(-m)^2 - 4(2)(m+6) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

m -12

m +4

$$(m - 12)(m + 4) = 0$$

$$\rightarrow m - 12 = 0 \vee m + 4 = 0$$

Finalmente : $m = 12 \vee m = -4$

3. Determinar la suma de los valores de "k" que hacen que la suma de las raíces de la ecuación:

$$x^2 + kx + 2x - k^2 + 4 = 0$$

sea igual al producto de las mismas.

Solución:

Dando forma a la ecuación:

$$1x^2 + (k+2)x + (4 - k^2) = 0$$

Según el problema:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2$$

$$\frac{-(k+2)}{1} = \frac{4-k^2}{1}$$

$$-k - 2 = 4 - k^2$$

$$\rightarrow k^2 - k - 6 = 0$$

k - 3

k +2

$$(k - 3)(k + 2) = 0$$

De donde: $k - 3 = 0 \vee k + 2 = 0$

$k = 3 \vee k = -2$

4. Determinar el valor de "p" en la ecuación:

$$x^2 - 6x + 4 + p = 0$$

sabiendo que la diferencia de sus raíces es 2.

Solución:

Por propiedad: $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Dato del problema : $x_1 - x_2 = 2$

Reemplazando datos :

$$2 = \frac{\sqrt{(-6)^2 - 4(1)(4+p)}}{1} \rightarrow \sqrt{36 - 16 - 4p} = 2$$

Elevando al cuadrado : $20 - 4p = 4 \Rightarrow 4p = 16$

$$\therefore p = 4$$

5. Hallar el valor de "n" para que las raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2 + 3x}{5x + 2} = \frac{n-1}{n+1}$$

sean simétricas.

Solución:

Multiplicando en aspa se tiene:

$$(n + 1)(x^2 + 3x) = (n - 1)(5x + 2)$$

Efectuando :

$$(n+1)x^2 + 3(n+1)x = 5(n - 1)x + 2(n - 1)$$

Transponiendo y agrupando:

$$(n + 1)x^2 + [3(n + 1) - 5(n - 1)]x - 2(n - 1) = 0$$

$$(n + 1)x^2 + (-2n + 8)x - 2(n - 1) = 0$$

Las raíces de la ecuación serán simétricas, si: $x_1 + x_2 = 0$

$$-\frac{(-2n+8)}{n+1} = 0$$

$$-2n + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2n = 8$$

Finalmente: $n = 4$

6. Forma la ecuación de 2do grado de coeficientes reales, si una de sus raíces es: $x_1 = 2 - 5i$

Solución:

Por teorema de raíces complejas conjugadas, si: $x_1 = 2 - 5i$ entonces la otra raíz es $x_2 = 2 + 5i$

Para formar la ecuación se necesita:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 - 5i + 2 + 5i = 4 \\ P = x_1 x_2 = (2 - 5i)(2 + 5i) \end{cases}$$

$$= 2^2 - (5i)^2 = 4 - 25i^2$$

pero: $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

Reemplazando:

$$P = x_1 x_2 = 4 - 25(-1) = 29$$

Luego la ecuación es: $x^2 - Sx + P = 0$

Es decir: $x^2 - 4x + 29 = 0$

## Problemas para la clase

**Bloque I**

1. Hallar las raíces de la ecuación:

$$3x^2 - x - 10$$

a) $\left\{-\frac{5}{3}; 2\right\}$  b) $\left\{-\frac{3}{2}; 5\right\}$  c) $\left\{\frac{5}{3}; -2\right\}$

d) $\left\{\frac{3}{2}; -5\right\}$  e) $\{5; -2\}$

2. Hallar una raíz de la ecuación:

$$2x^2 - 3x - 3 = 0$$

a) $\frac{2-\sqrt{32}}{3}$  b) $\frac{13+\sqrt{33}}{4}$  c) $\frac{3-\sqrt{32}}{2}$

d) $\frac{3+\sqrt{33}}{4}$  e) $\sqrt{3}$

3. Siendo: "$x_1$" $\wedge$ "$x_2$" las raíces de la ecuación:

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

Hallar : $E = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

a) 2 b) 3 c) 6
d) 4 e) 5

4. Siendo "$\alpha$" y "$\beta$" raíces de la ecuación:

$$2x^2 - 6x + 1 = 0$$

Hallar : $M = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

a) 16 b) 15 c) 14
d) 13 e) 12

5. Calcular "m", si una raíz de la ecuación:

$$x^2 - mx + 8 = 0, \text{ es: } x = 2$$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

6. Hallar una raíz de:

$$6x^2 + x - 12 = 0$$

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $-\dfrac{4}{3}$
d) -4 e) 3

7. Resolver:

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x} - 4 = \frac{18}{x^2 + 3x}$$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$
d) 2 e) 1

8. Resolver:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Indicar una raíz.

a) $-2 + \sqrt{2}$ b) $2 - \sqrt{2}$ c) $2 + \sqrt{2}$
d) $\sqrt{2} - 2$ e) $\sqrt{2}$

9. Hallar una raíz de:

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

a) $-3 + \sqrt{2}$ b) $3 + \sqrt{2}$ c) $3 - \sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3} + 1$

10. Resolver:

$$12x^2 + 60x + 75 = 0$$

a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $-\dfrac{5}{2}$
d) $\dfrac{1}{2}$ e) 5

**Bloque II**

1. Hallar "a" (a>0), si la ecuación:

$$9x^2 - (a + 2)x + 1 = 0$$

presenta raíces iguales.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 10

2. Hallar "m", si la ecuación:

$$x^2 - (m+7)x + 25 = 0$$

presenta raíz doble (m>0)

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Hallar "m", si la ecuación:

$$3x^2 - (3m - 600)x - 1 = 0$$

posee raíces simétricas.

a) 0 b) 50 c) 100
d) 150 e) 200

4. Hallar "k", si la ecuación:

$$(2k - 1)x^2 - 7x + (k+9) = 0$$

posee raíces recíprocas

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

5. Dada las ecuaciones:

$(n-1)x^2 - 3(n+5)x + 10 = 0$ ...... (I)
$(m-2)x^2 - (m+7)x + 2(9m+1) = 0$ ...... (II)

La suma de raíces de la ecuación (I) es 12 y el producto de raíces de la ecuación (II) es 20. Calcular "mn"

a) 63 b) 64 c) 65
d) 66 e) 67

6. Si $x_1$; $x_2$ son raíces de:

$$x(x - 6) = -3$$

obtener:

$$T = (1 + x_1)(1 + x_2)$$

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

7. La suma de las inversas de las raíces de la ecuación:

$$^2 - 2ax - (3 - 2a) = 0$$

es 10/7. Calcular "a".

a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 6

8. Si:

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

tiene raíz doble, calcular el valor de:

$$(m^2 + m + 1)$$

a) 3 b) 13 c) 21
d) 7 e) 31

9. Hallar el valor de "n" si:

$$x^2 - 2(n - 3)x + 4n = 0$$

tiene única solución.

a) 3 b) 7 c) 9
d) 1 e) -3

10. Hallar una raíz:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9}$$

a) $\frac{17}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) 3

d) $-\frac{17}{2}$ e) -3

**Bloque III**

1. Formar la ecuación de 2do grado de coeficientes racionales, si una de sus raíces es: $x_1 = 7 - \sqrt{2}$

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$ b) $x^2 - 14x + 45 = 0$
c) $x^2 - 14x + 47 = 0$ d) $x^2 + 14x - 47 = 0$
e) $x^2 - 14x - 47 = 0$

2. Para que una de las raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sea el triple de la otra, la relación de coeficientes debe ser:

a) $16b^2 = 4ac$ b) $16b^2 = 3a$
c) $3b^2 = 16a$ d) $3b^2 = 16ac$
e) $9b^2 = 16ac$

3. Indique (V) o (F):

I. En: $abx^2 - (a^2 - b^2)x = ab$, una raíz es $-\frac{b}{a}$

II. Si: $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ entonces: $x = \sqrt{2}$.

III. La mayor raíz de $(x-4)^2 + (x-5)^2 = (x - 3)^2$, es: $x = 8$

a) VFF b) VVV c) FFV
d) VFV e) VVF

4. Formar la ecuación de 2do grado cuyas raíces son:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} ; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$$

a) $(a - 1)x^2 - 2ax + a = 0$
b) $(a - 1)x^2 + 2ax + a = 0$
c) $(a + 1)x^2 - 2ax + a = 0$
d) $(a - 1)x^2 - ax + a = 0$
e) $x^2 + ax + 1 = 0$

5. Dada la ecuación:

$$2x^2 - 12x + (p + 2) = 0$$

Calcular "p", para que la diferencia de sus raíces sea 2.

a) -14 b) -7 c) -1
d) 1 e) 14

6. Hallar una raíz:

$$\frac{(1 - ax)^2 - (a - x)^2}{1 - a^2} \div \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 + 8x^3 + x^4}} = 8$$

a) 5 b) -3 c) 2

d) 4 e) $-\frac{5}{3}$

7. Para qué valor de m ($m \neq 0$) las raíces de:

$$(m + 4)x^2 - 3mx + m - 1 = 0$$

difieren de 1.

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

8. Calcule "a" $\in \mathbb{Z}$ para que:

$$ax^2 - (a + 3)x + 5 - a = 0$$

tenga una sola raíz.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

9. Si:

$$(b - 1)x^2 + 2bx + c = 0$$

tiene raíces iguales, hallar el mayor valor de "c", sabiendo que "b" es único.

a) 0 b) 2 c) 3
d) 4 e) 1

10. En:

$$2x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$$

¿qué valor positivo debe darse a "m" para que las raíces difieran en uno?

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

## Autoevaluación

1. Hallar "m", si la suma de raíces de la ecuación es 10.

$$(m - 2)x^2 - (5m + 5)x + 8 = 0$$

a) 0 b) 1 c) 5
d) 15 e) 25

2. Hallar "k" (k<0), si la ecuación:

$$9x^2 - kx + 4 = 0$$

posee raíces iguales.

a) 12 b) 14 c) 16
d) -16 e) -12

3. Hallar "m", si las raíces de la ecuación son recíprocas:

$$(m - 3)x^2 - (m + 2)x + 3m - 15 = 0$$

a) 1 b) 2 c) 6
d) 7 e) 8

4. Hallar "n", si una raíz de la ecuación:

$$x^2 + (n + 6)x + 6n = 0, \text{ es: } x = 3$$

a) -3 b) -2 c) 1
d) 2 e) 3

5. Formar la ecuación de 2do grado cuyas raíces son:

$$x_1 = 4 + \sqrt{3}$$
$$x_2 = 4 - \sqrt{3}$$

a) $^2 - 8x + 13 = 0$ b) $x^2 + 8x + 13 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 16 = 0$ d) $x^2 - 8x + \sqrt{13} = 0$
e) $x^2 - 8x + 3 = 0$

**Claves**

| | | |
|---|---|---|
| 1. c | 2. e | 3. c |
| 4. a | 5. a | |