

Conjunto de los números enteros (\mathbb{Z})

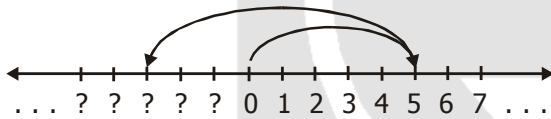


LA CONTRASEÑA

Un grupo de policías está investigando a un grupo de delincuentes que trafican en un local bien custodiado. Desde un coche camuflado vigilan la entrada al local. Quieren infiltrar a un grupo de policías, pero no saben la contraseña. En ese momento llega un cliente. Llama a la puerta y desde el interior le dicen: "18". El cliente responde: "9". La puerta se abre y accede al interior. Los policías se miran, creen tener la respuesta. Pero deciden esperar. Viene otro cliente. Desde dentro le dicen: "8". El responde: "4". La puerta se abre. Los policías sonrían. "Ya lo tenemos. Se trata de responder la mitad del número que te dicen desde dentro". Llega otro cliente. Desde dentro dicen: "14". El cliente contesta: "7". La puerta se abre. "¿Lo veis?" dice el jefe de policía. Deciden enviar a un agente. Llama a la puerta. Desde dentro le dicen: "0". El policía se queda parado. Después de unos breves segundos responde: "0". Se oye una ráfaga de disparos y el policía muere. Los agentes que hay en el coche se quedan sorprendidos, pero deciden enviar a otro agente. Desde dentro se oye: "6". El policía contesta muy convencido: "3". Pero la puerta no se abre. Se oye una ráfaga de disparos y el policía muere. ¿Por qué?

INTRODUCCIÓN

En el conjunto de los números naturales (\mathbb{N}) la sustracción donde el minuendo era menor que el sustraendo **NO** tenía solución, como por ejemplo: $5 - 8$. Investigemos este tipo de situaciones, representamos $5 - 8$ en la recta numérica.



Como podemos ver, si se conocieran los números que están ubicados a la izquierda del CERO ... ¡estaría resuelto el problema! Veamos:

- El punto que está ubicado a una unidad a la izquierda del cero, representa el **número entero -1**
- El punto que está ubicado a dos unidades de la izquierda del cero, representa el **número entero -2**
- El punto que está ubicado a "n" unidades a la izquierda del cero, representa el **número entero "-n"**

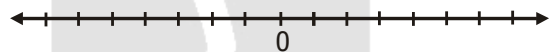
Ahora podemos responder: ¿qué número entero es el resultado de $5 - 8$? Sería -3 .

Nos encontramos frente a un nuevo conjunto numérico.

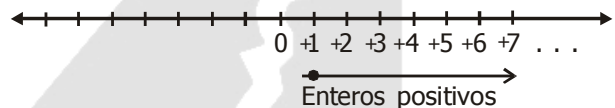
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS (\mathbb{Z})

El conjunto de los números enteros permite resolver las sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo, además que nos permite también expresar 12° bajo cero, como: -12° y se lee "menos 12 grados". También, si se debe $\$/.5\ 000$, decir: $-\$/.5\ 000$, que se lee "menos $\$/.5\ 000$ "; o si retrocedemos 49, señalar -49 , etc.

De esta manera, el ámbito numérico se nos agranda hacia la izquierda de la recta numérica, donde el 0 es el origen.



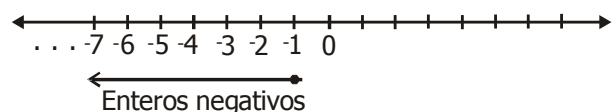
Ubicaremos los enteros que ya conocemos, por convención, a la derecha del 0, y ahora los llamaremos enteros positivos. Estos números no necesitan llevar ningún signo +, pero para identificarlos mejor, los escribiremos con su signo. Así:



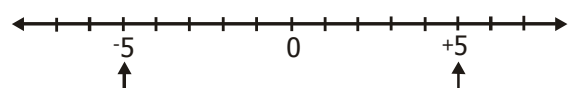
Al conjunto de los enteros positivos se le reconoce como \mathbb{Z}^+ .

Hacia la izquierda del 0, colocaremos los números enteros negativos. Estos van a la misma distancia del 0 que los enteros positivos.

A los enteros negativos no les puede faltar el signo -. Los enteros negativos se simbolizan como \mathbb{Z}^- .



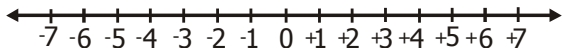
Como los enteros negativos están a la misma distancia del 0 que los positivos, se les llama opuestos o simétricos. Entonces, -5 es el opuesto de $+5$.



Se observa que:
Opuesto de $-5 = 0p(-5) = -(-5) = 5$

Resumiendo ...

El conjunto de los números enteros está formado por los enteros positivos, el cero y los enteros negativos.



En símbolos: $\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+\}$

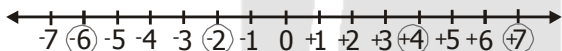
RELACIÓN DE ORDEN EN \mathbb{Z}

\mathbb{Z} es un conjunto ordenado. Esto quiere decir que hay números enteros mayores o menores que otros.

Un número es mayor que otro si su representación en la recta numérica está más a la derecha; por ejemplo 4 es mayor que 1 (se representa: $4 > 1$). Un número es menor que otro si su representación en la recta está más a la izquierda; por ejemplo, 2 es menor que 5 (se representa: $2 < 5$).

Analicemos los siguientes ejemplos:

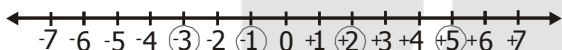
- Ordenaremos de menor a mayor +7; -6; +4 y -2 en la recta numérica, a partir del 0. Así, tenemos que:



El número menor es -6, porque es el que está más a la izquierda; luego viene el -2; el 4 y el 7. En símbolos queda:

$$-6 < -2 < +4 < +7$$

- En el siguiente ejemplo, ordenaremos de mayor a menor -1; +2; +5; 0 y -3. Tenemos:



El número mayor es +5 y el menor es -3. Nos queda:

$$+5 > +2 > 0 > -1 > -3$$

Analizando los ejemplos anteriores, podemos sacar algunas conclusiones muy importantes. Estas nos servirán para ordenar números enteros sin dibujar la recta numérica:

- Todo número entero positivo es mayor que 0.
- Todo número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.
- Todo número entero negativo es menor que 0.
- Todo número entero negativo es menor que cualquier número entero positivo.

Si expresamos estas conclusiones en símbolos, tenemos:

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}^+ > 0 \\ \mathbb{Z}^- < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}^+ > \mathbb{Z}^- \\ \mathbb{Z}^- < \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

SIGNO Y VALOR ABSOLUTO

Un número entero tiene dos partes: el signo y su valor absoluto.

El signo puede ser positivo: +, o negativo: -.

El valor absoluto puede definirse como su distancia al 0 en la recta numérica o la cantidad de unidades que tiene.

Por ejemplo, observa:

-28 tiene signo "-" y su valor absoluto es 28.

Para simbolizar el valor absoluto de un número, lo encerramos entre dos barras.

Por ejemplo:

Si queremos indicar el valor absoluto de -49, escribiremos $|-49| = 49$

$$* \quad |+10| = 10$$

$$* \quad |-10| = 10$$

Nos quedó pendiente determinar una fórmula para encontrar un orden sólo entre enteros positivos o sólo entre enteros negativos. Aplicamos el concepto de valor absoluto.

- Entre enteros positivos, es mayor el que tiene un valor absoluto mayor. Por ejemplo, si ordenamos +40, +9, +300 de mayor a menor, tenemos que: el mayor valor absoluto lo tiene 300, luego sigue 40 y finalmente 9. Entonces decimos:

$$+300 > +40 > +9$$

Mientras más lejos de 0 esté un número entero positivo, su valor es mayor, porque está más a la derecha.

- En los enteros negativos sucede lo contrario: mientras más lejos de 0, su valor es menor, porque está más a la izquierda en la recta numérica.

Esta conclusión nos permite determinar que en los enteros negativos, es mayor el que tiene menos valor absoluto.

Por ejemplo, ordenaremos de menor a mayor -40; -9; -300. El menor es -300, porque tiene el valor absoluto mayor, le sigue -40 y luego -9.

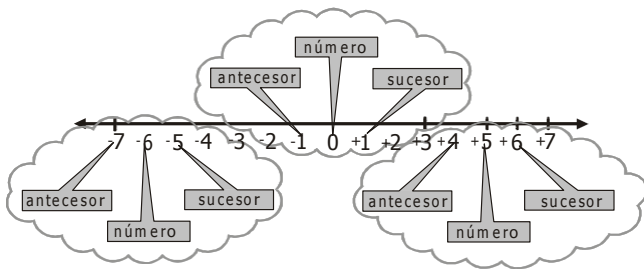
$$-300 < -40 < -9$$

Antecesor y sucesor

Otra característica que representa el conjunto de los números enteros, es que cada número tiene antecesor y sucesor.

Para cualquier número, es **antecesor** el que se ubica inmediatamente a la izquierda de él y es **sucesor**, el que está inmediatamente a su derecha.

Observa:



En los números naturales, el 0 (cero) no tenía antecesor, en cambio, en los números enteros, todo número tiene antecesor y sucesor.

Problemas para la clase

Bloque I

1. Expresa las siguientes situaciones con números enteros:

- Siete grados bajo cero.
- La altitud de un pico es de 1 205 m.
- El buzo está a 32 metros de profundidad.
- El avión vuela a 8 500 m de altura.
- Veinte años antes de Cristo.

2. Escribe en tu cuaderno los números enteros comprendidos entre:

- 4 y +3
- 5 y +5
- 10 y -2
- 8 y +1
- +5 y +12

3. ¿Cuándo estoy financieramente mejor?

- Si tengo S/.500 ó si tengo S/.159
- Si debo S/.200 ó si tengo S/.8
- Si debo S/.40 ó si debo S/.45
- Si no tengo dinero o si debo S/.60

4. En cada caso, uno de los hombres mencionados es el padre y el otro es el hijo. Decida cuál es cada uno de ellos.

- Manrique nació en el año 135 a.C. y José nació en el año 158 a.C.
- Jorge nació en el año 18 d.C. y Pedro nació en el año 7 a.C.
- Marcelo nació en el año 1547 d.C., y Julián en el año 1578 d.C.
- Roberto nació en el año cero de nuestra era y Humberto en el 40 a.C.

5. Colocar el signo ">" (mayor que) o "<" (menor que) según corresponda:

- | | |
|-----------------|--------------|
| +34 +17 | -6 +12 |
| +7 +16 | 45 -1 |
| -6 -8 | -16 10 |
| -9 -7 | 0 24 |
| -150 -135 | -4 0 |

6. En la siguiente recta numérica, las letras representan números enteros.



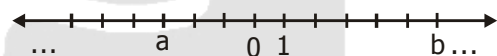
Completen con el signo >, < ó =.

- | | |
|-----------|-----------|
| z j | z p |
| z a | z 0 |
| z m | z z |
| b a | p q |

7. Recuerden que esta expresión $|n|$ significa "valor absoluto del número -n". Nuevamente indique: >; < ó =; en:

- | | |
|-------------------|-----------------|
| +8 +8 | 7 -7 |
| 0 -4 | -135 135 |
| 0 -4 | -135 135 |
| -4 -12 | 135 -135 |
| -250 -252 | -250 -252 |

8. Trabaja con la siguiente recta numérica:



- Marca en ella los opuestos de "a" y de "b".
- ¿Qué signo tiene "a"? ¿Cómo te das cuenta? ¿Y su opuesto?
- ¿Qué signo tiene "b"? ¿Y su opuesto?
- Ordena los seis números de mayor a menor:

9. Completa:

- el opuesto de +2 es
- el opuesto de -8 es
- el opuesto de +15 es
- el negativo de +50 es
- el negativo de -30 es

10. Calcular:

- a) el opuesto del negativo de -7.
- b) el negativo del opuesto de +12.

Bloque II

Resuelve en tu cuaderno:

1. En cada ejercicio ordene los números de menor a mayor y escriba entre ellos el símbolo ">" o el símbolo "<", según corresponda:

- a) 2; 1; 4; -1; -8; -2
- b) 63; 47; 89; -83; -85; -64
- c) 286; 884; -572; -433
- d) 7 525; 2 996; 6 477; -6 214; -8 357; -3 234

2. En cada ejercicio ordene los números de mayor a menor y escriba entre ellos el símbolo ">" o el símbolo "<", según corresponda:

- a) 40; -32; 28; 77; 0
- b) 3; 5; -9; -2; 7; 18
- c) 3 241; -5 008; 2 126; 999; -876
- d) 18; -59; -23; 132; -6; -220

3. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números:

- a) 186 b) -30 c) 60
- d) -174 e) 320 f) -109

4. Encuentre todos los números enteros que son:

- a) mayores o iguales que 23 y menores que 32
- b) mayores que 0 y menores o igual a 13
- c) mayores que -2 y menores que 3
- d) mayores que -7 y menores que -1

5. Encuentre un número:

- a) tres unidades mayor que 12
- b) tres unidades mayor que -12
- c) dos decenas menor que 34

- d) dos decenas menor que -34
- e) una centena mayor que 125
- f) una centena mayor que -125
- g) una centena menor que 50
- h) una centena mayor que -50

6. En la recta numérica represente:

- a) los números: 0; 10; -10; 20; -20; 30 y -30
- b) los números: -27; -28; -29; -30; -31
- c) los números: 0; -1; -2; -3; -4; 1; 2; 3; 4

7. Conteste las siguientes preguntas y exprese la situación con símbolos:

- a) El lunes, Doña Petra debía en la tienda de la esquina \$45. El viernes siguiente debía \$434. ¿Mejóro o empeoró su situación?
- b) En Puno, el día 17 de enero estaban a 5° bajo cero, y el 20 estaban a 7° bajo cero. ¿Qué día fue más alta la temperatura?
- c) El buzo "A", baja a 70 metros bajo el nivel del mar, y el buzo "B" baja a 81 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuál de los dos está más cerca de la superficie?
- d) El saldo de la empresa "Caluro S.A." es de \$ 12 807 en números rojos, y el de la empresa "Forzo S.A." es de \$ 6 014 en números negros. ¿Cuál de las dos empresas está en mejor situación?

8. Escribe el antecesor y el sucesor de los siguientes números:

- a) -105 b) 392 c) -5 001
- d) -9 001 e) 3 415 f) -4 999

9. Calcular:

$$\text{Op}(| - 2 |) + | \text{Op}(- 2) |$$

- a) 0 b) 2 c) 4
- d) - 2 e) - 4

10. Dana Valentina se puso a contar cuántos números enteros hay entre - 5 y su opuesto. ¿Cuántos opuestos contó Dana Valentina?

- a) 8 b) - 8 c) 9
- d) 4 e) - 4