Serie de razones Geométricas equivalentes

El saldo de la cuenta de Rogelio

Mi amigo Rogelio tiene una gran afición a las matemáticas. Su obsesión son los números. Vive siempre con su mente ocupada al menos por una docena de dígitos.
El otro día descubrió una curiosa relación. Comprobó que los números de su casa y los de las casas de sus amigas Silvia y Lucía eran primos consecutivos. Si se multiplicaban los tres entre sí, el resultado era el saldo de su cuenta bancaria.
La casa de Rogelio está entre las de Silvia y Lucía. El saldo de la cuenta comienza con 6 y tiene un total de cinco cifras.
¿Cuál es el número de la casa de Rogelio y el saldo de su cuenta en el banco?

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo el alumno estará en capacidad de:

- Reconocer los elementos de una serie de razones geométricas equivalentes.
- Construir una serie de R.G.E. dado un conjunto de números.
- Aplicar las propiedades adecuadamente.

Introducción

Supongamos que tenemos tres toneles cuyas capacidades son proporcionales a los números 3; 5 y 8. Esto quiere decir que sus capacidades podrían ser:

3 x 20 = 60 litros	o también	3 x 25 = 75 litros
5 x 20 = 100 litros		5 x 25 = 125 litros
8 x 20 = 160 litros		8 x 25 = 200 litros

Como podemos ver existen muchas opciones pero los volúmenes siguen guardando la misma proporción. Si "A" es la capacidad del primer tonel, "B" la del segundo y "C" la del tercero, podremos escribir las razones geométricas.

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{5}=\frac{C}{8}=K$$

A la que denominaremos serie de razones geométricas equivalentes.

Serie de razones geométricas equivalentes

Es la igualdad de dos o más razones geométricas que tienen el mismo valor.

Ejemplo:

$$\frac{12}{24}=\frac{1}{2};\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2};\quad \frac{25}{50}=\frac{1}{2};\quad \frac{20}{40}=\frac{1}{2}$$

igualando:

$$\underbrace{\frac{12}{24}=\frac{4}{8}=\frac{25}{50}=\frac{20}{40}}_{\text{Serie de razones}}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Valor de la razón}}$$

En general, podemos escribir:

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3}=....=\frac{a_n}{c_n}=K$$

Donde:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$: Antecedentes
$c_1, c_2, c_3, ..., c_n$: Consecuentes
K : Constante de proporcionalidad o valor de la razón.

Propiedades:

<u>Propiedad 1</u>

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}}=\text{Const. de proporcionalidad}$$

Es decir:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{c_1+c_2+c_3+....+c_n}=K$$

Por ejemplo:

$$\frac{12}{24}=\frac{4}{8}=\frac{25}{50}=\frac{20}{40}\Rightarrow\frac{12+4+25+20}{24+8+50+40}=\frac{61}{122}=\frac{1}{2}$$

<u>Propiedad 2</u>

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}}=(\text{Const. de Proporcionalidad})^n$$

Donde "n" es el número de antecedentes o consecuentes que se multiplican.

Es decir:

$$\frac{a_1 . a_2 . a_3 . \ldots a_n}{c_1 . c_2 . c_3 . \ldots c_n} = K^n$$

Por ejemplo :

$$\frac{12}{24} = \frac{4}{8} = \frac{25}{50} = \frac{20}{40} \Rightarrow \frac{12 \times 4 \times 25 \times 20}{24 \times 8 \times 50 \times 40} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Observación
Si tenemos una serie de razones geométricas de la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots = K$$

Se denomina serie de razones geométricas continuas.
En esta serie continua también se cumplen las propiedades mencionadas.

Ejercicio 1

En una serie de 4 razones geométricas los consecuentes son 5; 7; 10 y 12. Si la suma de los dos primeros antecedentes es 84, hallar los otros antecedentes.

Solución:

Formamos la serie con los datos proporcionados:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{d}{12} = K \quad ; a + b = 84$$

Por el dato que nos dan (suma) aplicamos la propiedad 1:

$$\frac{a+b}{5+7} = K$$

$$\frac{84}{12} = K \rightarrow K = 7$$

Luego: $\frac{c}{10} = K = 7$ $\qquad$ $\frac{d}{12} = K = 7$

$c = 70$ $\qquad$ $d = 84$

Ejercicio 2

Si se cumple:

$$\frac{J}{972} = \frac{E}{J} = \frac{S}{E} = \frac{I}{S} = \frac{4}{I} = K$$

Hallar "J + E + S + I"

Solución:

Si observamos con cuidado veremos que cada letra aparece como antecedente y consecuente de las diferentes razones, entonces si multiplicamos todos los antecedentes y todos los consecuentes resultará:

$$\frac{J.E.S.I.4}{972.J.E.S.I} = K^5$$

$$\frac{4}{972} = K^5$$

$$\frac{1}{243} = K^5 \rightarrow K = \frac{1}{3}$$

Luego podemos escribir:

$$\frac{\overbrace{J}^{324}}{972} = \frac{\overbrace{E}^{108}}{\underbrace{J}_{324}} = \frac{\overbrace{S}^{36}}{\underbrace{E}_{108}} = \frac{\overbrace{I}^{12}}{\underbrace{S}_{36}} = \frac{4}{\underbrace{I}_{12}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad J + E + S + I = 324 + 108 + 36 + 12$$
$$J + E + S + I = 480$$

Problemas para la clase

Nivel I

1. Si se cumple:

$$\frac{a}{15} = \frac{20}{b} = \frac{18}{27} = \frac{8}{c}$$

Hallar "a + b + c"

a) 48 $\qquad$ b) 36 $\qquad$ c) 52
d) 24 $\qquad$ e) 72

2. Si :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = \frac{d}{6}$$

a + b = 48, hallar "c.d"

a) 576 $\qquad$ b) 1 728 $\qquad$ c) 288
d) 864 $\qquad$ e) 3 456

3. En la serie :

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = \frac{d}{10}$$

Se cumple : a . c = 405, hallar "b + d"

a) 51 $\qquad$ b) 64 $\qquad$ c) 36
d) 48 $\qquad$ e) 96

4. Dada la serie :

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{18}$$

Se cumple : a.b.c = 2 916
Hallar "a + b + c"

a) 36 $\qquad$ b) 48 $\qquad$ c) 50
d) 56 $\qquad$ e) 72

5. Los volúmenes de tres recipientes son proporcionales a los números 4; 5 y 10. Si la suma de los cuadrados de los dos menores volúmenes es 656. Hallar el volumen mayor.

a) 20 b) 30 c) 32
d) 40 e) 48

6. Los consecuentes de 3 razones geométricas equivalentes son 12; 5 y 10. Si el producto de los antecedentes es 16 200, hallar la suma de los antecedentes.

a) 72 b) 75 c) 81
d) 96 e) 120

7. En una serie de 3 razones geométricas equivalentes continuas el producto de las 3 razones es 1/27. Si la suma de los consecuentes es 234, hallar el mayor antecedente.

a) 54 b) 48 c) 72
d) 64 e) 60

8. Los antecedentes de una serie de razones geométricas equivalentes son 7; 10; 12 y 15. Si el producto de los dos primeros consecuentes es 1 120, hallar la diferencia de los dos últimos consecuentes.

a) 5 b) 9 c) 10
d) 12 e) 18

9. Dada la serie:

$$\frac{a}{15}=\frac{b}{12+n}=\frac{c}{10-n}=\frac{d}{7}$$

Se cumple : a + b + c - d = 120
Hallar "a . d"

a) 1 210 b) 1 420 c) 1 540
d) 1 680 e) 1 840

10. En una serie de 3 razones geométricas equivalentes la suma de las 3 razones es 3/4. Si el producto de los antecedentes es 225. Hallar el producto de los consecuentes.

a) 14 400 b) 15 600 c) 14 200
d) 13 200 e) 12 100

Nivel II

1. Sabiendo que:

$$\frac{T}{L}=\frac{R}{C}=\frac{I}{E}$$

y además: T + R + I = 28 ;
L + C + E = 70

Hallar: $\frac{T.R.I.}{L.C.E.}$

a) $\frac{8}{25}$ b) $\frac{8}{125}$ c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{4}{25}$ e) $\frac{2}{125}$

2. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números 7; 4 y 33. ¿Cuál es la razón aritmética de los números?

a) 8 b) 6 c) 12
d) 16 e) 24

3. En una serie de 3 razones geométricas equivalentes, el producto de los antecedentes es 576 y el producto de los consecuentes es 9 000. Hallar la suma de los antecedentes si los 6 términos suman 91.

a) 29 b) 13 c) 48
d) 32 e) 26

4. Dada la serie:

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

Se cumple : (A + B + C) (a + b + c) = 1 296
Calcular :

$$M=4\left(\sqrt{A.a}+\sqrt{B.b}+\sqrt{C.c}\right)$$

a) 72 b) 144 c) 36
d) 180 e) 120

5. Si:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=\frac{d}{7}$$

a . c . b + b . c . d = 6 480
Hallar "a + b + c + d"

a) 50 b) 60 c) 70
d) 80 e) 90

6. Si se cumple:

$$\frac{K}{64}=\frac{A}{K}=\frac{R}{A}=\frac{Y}{R}=\frac{2}{Y}$$

Hallar "K + A + R + Y"

a) 50 b) 60 c) 80
d) 100 e) 120

7. Si:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{p}=\frac{c}{t}=K$$

a . b . c = 60
apt + mbt + mpc = 2 880
Hallar "K"

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

8. Si se cumple:

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f};$$

$$\frac{a.b.c}{d.e.f}=\frac{1}{27}$$

Hallar:

$$M=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{d^3+e^3+f^3}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{1}{81}$

9. En una serie de 4 razones geométricas equivalentes continuas la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como 15 es a 45. Si la suma de los términos de la segunda razón es 84, hallar la suma del mayor y menor consecuente.

a) 588 b) 244 c) 288
d) 576 e) 512

10. Dada la serie de razones equivalentes:

$$\frac{a}{65}=\frac{6}{b}=\frac{c}{35}=\frac{10}{d}$$

se observa que "a", "d", "b" y "c" forman una proporción aritmética.
Hallar "a + b + c + d"

a) 40 b) 60 c) 80
d) 90 e) 100

Nivel III

1. Dada la serie de razones:

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{d}=\frac{D}{d};$$

$$\frac{A.B.C.D}{a.b.c.d}=4\,096$$

Hallar:

$$M=\frac{A^{10}+B^{10}+C^{10}+D^{10}}{a^{10}+b^{10}+c^{10}+d^{10}}$$

a) 2^{10} b) 2^{15} c) 2
d) 2^{20} e) 2^{30}

2. Dada la serie:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f};$$

$a^2+c^2+e^2=324$
Calcular:

$$M=\frac{2}{3}\left[\frac{ab+cd+ef}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}\right]$$

a) 12 b) 15 c) 18
d) 24 e) 32

3. En una serie de cuatro razones geométricas continuas la suma del primer antecedente y del tercer consecuente es 1176. Determinar el mayor consecuente si el producto de las cuatro razones es 1/81.

a) 1 701 b) 3 402 c) 6 804
d) 5 103 e) 10 206

4. En la siguiente serie de razones equivalentes:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}=\frac{D}{q}$$

Se cumple : $A+B+C+D=63$;
$m+n+p+q=175$

Hallar :

$$E=\sqrt{A.m}+\sqrt{B.n}+\sqrt{C.p}+\sqrt{D.q}$$

a) 105 b) 210 c) 51
d) 315 e) 21

5. Si :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f};$$

$$(a+b)(c+d)(e+f)=2^{21}$$

Hallar : $M=\sqrt[3]{a.c.e.}+\sqrt[3]{b.d.f}$

a) 64 b) 96 c) 128
d) 154 e) 196

6. Dada la serie :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=K$$

Se cumple : $\frac{a.c.e}{b.d.f}=\frac{125}{343}$

Hallar : $E=\frac{a^2+c^2+e^2}{ab+cd+ef}$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$

d) $\dfrac{5}{7}$ e) $\dfrac{25}{49}$

7. Si :

$$\frac{32}{E}=\frac{E}{V}=\frac{V}{4}=\frac{4}{A}$$

Hallar "E . V . A"

a) 256 b) 196 c) 200
d) 225 e) 324

8. Dada la serie:

$$\frac{a}{10}=\frac{b}{15}=\frac{c}{18}=K$$

Si "b" es el menor número tal que puede ser antecedente en cualquiera de las 3 razones y la constante siempre resulte entera. Hallar "a + b + c"

a) 172 b) 129 c) 387
d) 258 e) 516

9. En la siguiente serie :

$$\frac{3a+b}{9}=\frac{34-b}{7}=\frac{a+b}{4}$$

Calcular "a + b"

a) 12 b) 14 c) 16
d) 20 e) 18

10. Si : $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$; $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{m^4+n^4+p^4}=1\,296$

Hallar :

$$M=\frac{a^2.m+b^2.n+c^2.p}{m^3+n^3+p^3}$$

a) 36 b) 9 c) 27
d) 81 e) 24

Autoevaluación

1. Dada la serie: $\dfrac{a}{15}=\dfrac{b}{10}=\dfrac{c}{25}$

Se cumple que : a.b.c = 810; hallar "a + b + c"

a) 32 b) 35 c) 30
d) 36 e) 48

2. En una serie de razones geométricas los antecedentes son 9; 15 y 21. Si la suma de las 3 razones es 9/4, hallar el mayor consecuente.

a) 21 b) 28 c) 32
d) 35 e) 40

3. Dada la serie de razones: $\dfrac{R}{96}=\dfrac{I}{R}=\dfrac{T}{I}=\dfrac{A}{T}=\dfrac{3}{A}$

Hallar "R + I + T + A"

a) 60 b) 75 c) 120
d) 125 e) 90

4. Dada la serie : $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{7}$

y a . b + a . c + b . c = 639; hallar "a . b . c"

a) 3 215 b) 2 415 c) 3 432
d) 4 328 e) 2 835

5. Dada la serie : $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}$

se cumple : A + B + C = 80
a + b + c = 128

Hallar : $\dfrac{A^2+B^2+C^2}{a^2+b^2+c^2}$

a) $\dfrac{25}{36}$ b) $\dfrac{16}{25}$ c) $\dfrac{16}{49}$

d) $\dfrac{25}{64}$ e) $\dfrac{4}{9}$