

# Teoría de conjuntos



*En el restaurante "Luigi", un cliente se sobresaltó al encontrar una mosca en su café. Pidió al camarero que le trajese otro café. Tras tomar un sorbo, el cliente dijo: "Éste es el mismo café que tenía antes" ...*

*¿Cómo lo supo?*

## Noción de conjunto

Entenderemos por conjunto a la reunión, agrupación, colección o familia de integrantes homogéneos o heterogéneos, que reciben el nombre de elementos del conjunto.

## Determinación de conjuntos

Un conjunto queda determinado cuando es posible decidir si un objeto dado pertenece o no al conjunto. Para determinar conjuntos se puede proceder:

- 1. Por extensión:** Cuando se mencionan uno a uno todos los elementos del conjunto, por ejemplo:

$$A = \{\text{Brasil, Argentina, Uruguay}\}$$
$$B = \{0; 1; 2; 3\}$$

- 2. Por comprensión:** Cuando se enuncia una propiedad o característica común que cumplen sus elementos, por ejemplo:

$$A = \{x/x \text{ es un país sudamericano que ha ganado un campeonato mundial de fútbol}\}$$
$$B = \{x/x \text{ es un número natural menor o igual que } 3\}$$

## Relación de pertenencia

Si un objeto "x" es elemento de un conjunto "A", escribiremos  $x \in A$  lo que se lee: "x" pertenece al conjunto "A". En caso contrario, escribiremos  $x \notin A$  lo que se lee: "x" no pertenece al conjunto "A".

Ejemplo:

$$\text{Si: } A = \{2; 5; 8; 9\}, \text{ entonces } 2 \in A \text{ y } 3 \notin A$$

El símbolo  $\in$  denota una relación de elemento a conjunto.

## Relaciones entre conjuntos

..... Dados los conjuntos "A" y "B", diremos que "A" es subconjunto de "B" o que "A" está incluido en "B", si cada elemento de "A" es también un elemento de "B". Se denota:  $A \subset B$ .

Simbólicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$$

Esto significa: "A" está incluido en "B" si y sólo si para todo "x", si "x" pertenece a "A", entonces "x" pertenece a "B".

El símbolo  $\subset$  denota una relación de conjunto a conjunto.

## Observación

Representación gráfica de  $A \subset B$  :

$A = B$        $A \subset B$   
("A" es subconjunto propio de "B")

- 2. ....** Dos conjuntos son iguales, si tienen los mismos elementos. Usando la relación de inclusión se tiene que:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejemplo:

$$\text{Si: } A = \{0; 1; 2\} \text{ y } B = \{x/x \text{ es un número natural menor que } 3\},$$

entonces:

$$A = B$$

## Conjuntos especiales

1. **Vacio o nulo:** Es aquel que carece de elementos. Se le representa por " $\emptyset$ " ó  $\{\}$ .

Por ejemplo:  $A = \{x/x \in \mathbb{N}; 4 < x < 5\}$

Nota: El conjunto vacío se considera subconjunto de todo conjunto. Simbólicamente  $\forall A, \emptyset \subset A$ .

2. **Conjunto unitario:** Es aquel conjunto que tiene un sólo elemento.

Ejemplos:

$$A = \{5; 5; 5; 5; 5; 5\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -5 < x < -3\} \Rightarrow B = \{-4\}$$

3. **Conjunto universal:** Es un conjunto que contiene todos los elementos de determinado contexto. Se denomina UNIVERSO (U). Existen muchos universos posibles.

4. **Conjunto potencia:** Se llama así a aquel conjunto que tiene por elementos a todos los subconjuntos de un conjunto dado, por ejemplo:

Dado:  $A = \{m, n, p\}$

Luego su conjunto potencia, que se denota por  $P(A)$ , será:

$$P(A) = \{\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}, \emptyset\}$$

El número de elementos del conjunto potencia se puede determinar en la siguiente relación:

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

Donde:  $n(A)$  es el número de elementos del conjunto "A".

### Observación



- Al número de elementos diferentes de un conjunto se le llama también **cardinal** del conjunto.
- Se llama **conjuntos disjuntos**, a aquellos que no tienen elementos comunes, por ejemplo:

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \text{ y } B = \{13; 14; 15\}$$

- Todo conjunto tiene **subconjuntos**, y la cantidad de estos esta dada por la siguiente relación:

$$\text{Número de subconjuntos} = 2^{n(A)}$$

- Se llama **subconjunto propio**, a todos los subconjuntos de un conjunto dado; excepto al que es igual al conjunto.

$$\text{Número de subconjuntos propios} = 2^{n(A)} - 1$$

## Problemas para la clase

### Bloque I

1. Determinar por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z}; -2 \leq x < 6\}$$

$$B = \{x^2 + 1/x \in \mathbb{N}; -3 < x \leq 4\}$$

$$C = \{2x - 1/x \in \mathbb{N}; 2 \leq x < 6\}$$

$$D = \left\{ \frac{x+1}{x-1} / x \in \mathbb{N}; 1 < x \leq 5 \right\}$$

2. Determinar por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{1; 4; 9; 16; 25\}$$

$$C = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$$

$$D = \{16; 19; 22; 25; \dots\}$$

3. Dado el conjunto:  $A = \{1; 2; \{3\}; 4; \{5\}\}$   
Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

$1 \in A$	( )	$2 \subset A$	( )
$\{4\} \in A$	( )	$\{3\} \subset A$	( )
$\{2; 4\} \in A$	( )	$\{4\} \subset A$	( )
$\{5\} \in A$	( )	$\{\emptyset\} \subset A$	( )
$4 \notin A$	( )	$\emptyset \subset A$	( )

4. Dado el conjunto:  $A = \{1; 2; \{3; 4; 5\}; \{6; 7\}\}$   
Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

$1 \in A$	.....	( )
$\{3; 4; 5\} \subset A$	.....	( )
$\{\{3; 4; 5\}; \{6; 7\}\} \subset A$	.....	( )
$\{1\} \in A$	.....	( )
$\{3; 4; 5; 6; 7\} \subset A$	.....	( )
$\emptyset \in \{A\}$	.....	( )

5. Si los conjuntos "A" y "B" son iguales:

$$A = \{n^2 + 1; -6\}$$

$$B = \{2 - m; 10\}$$

Hallar los posibles valores de "m + n".

6. Si se cumple que "A" y "B" son conjuntos unitarios, hallar "b - a".

$$A = \{2a + b; 13\}$$

$$B = \{b + 2; 3a - b\}$$

7. ¿Cuántos subconjuntos tiene cada uno de los siguientes conjuntos?

$$A = \{x/x \in \mathbb{N}; -2 < x < 5\}$$

$$B = \{2x + 1/x \in \mathbb{N}; -1 < x < 5\}$$

$$C = \{14; \{14\}; \emptyset; 14\}$$

8. Dados los conjuntos:

$$U = \{x \in \mathbb{N}/1 \leq x \leq 30\}$$

$$A = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 2\}$$

$$B = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 3\}$$

$$C = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 5\}$$

$$D = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 6\}$$

$$E = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 9\}$$

¿Qué conjuntos incluyen a "D" y qué conjuntos están incluidos en "D"?

9. Dado el conjunto:  $A = \{x \in \mathbb{Z}/36 < (x - 1)^2 < 144\}$

Calcular "n(A)"

$$10. \text{Si: } A = \left\{ \frac{n^2 - 16}{n - 4} / 2 \leq n \leq 5; n \in \mathbb{N} \right\}$$

halla la suma de los elementos de "A".

## Bloque II

1. Dado el conjunto universal:  $U = \{9; 10; 11; 12; \dots; 27\}$   
Escribe todos los siguientes conjuntos por extensión:

$$A = \{x \in U/"x" \text{ tiene suma de cifras igual a } 5\}$$

$$B = \{x \in U/"x" \text{ tiene producto de cifras igual a } 6\}$$

$$C = \{x \in U/"x^2" \text{ tiene como cifra de unidades al } 1\}$$

$$D = \{x \in U/"x" \text{ es un número primo}\}$$

2. Dado el conjunto universal:  $U = \{10; 11; 12; 13; \dots; 20\}$   
Determina cuál o cuáles de los siguientes conjuntos es igual al conjunto:

$$A = \{x \in U/"x" \text{ es múltiplo de } 9\}$$

$$\text{I. } B = \{x \in U/"x" \text{ tiene suma de cifras igual a } 9\}$$

$$\text{II. } C = \{x \in U/"x" \text{ tiene producto de cifras igual a } 9\}$$

$$\text{III. } D = \{x \in U/"2x" \text{ es un cuadrado perfecto}\}$$

3. Dado el conjunto:  $A = \{x^4 - 5x^2 + 4/x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x^2 \leq 9\}$

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda

$$\text{I. El número cardinal de "A" es } 7 \dots\dots\dots ( \quad )$$

$$\text{II. La suma de los elementos de "A" es } 44 \dots\dots ( \quad )$$

$$\text{III. El cero pertenece al conjunto "A" \dots\dots\dots ( \quad )}$$

4. Dado el conjunto:  $A = \{x^2 + 1/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 4\}$

Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

$$\text{I. } n(A) = 5 \dots\dots\dots ( \quad )$$

$$\text{II. "A" tiene } 16 \text{ subconjuntos } \dots\dots\dots ( \quad )$$

$$\text{III. "A" tiene } 31 \text{ subconjuntos propios } \dots\dots\dots ( \quad )$$

5. Sean los conjuntos iguales:

$$A = \{a^2 + 1; 12\} \quad B = \{a - b; 17\}$$

Hallar todos los posibles valores de "a + b".

6. Dados los conjuntos unitarios:

$$P = \{x + y; 8\}$$

$$Q = \{y + z; 10\}$$

$$R = \{x + z; 12\}$$

Calcular "x + y + z"

7. Dados los siguientes conjuntos iguales:

$$A = \{a + 2; a + 1\} \quad y \quad B = \{7 - a; 8 - a\}$$

$$C = \{b + 1; c + 1\} \quad y \quad D = \{b + 2; 4\}$$

Calcular "a + b + c"

8. Si:  $A = \{m + n; 8; 2m - 2n + 4\}$ , es un conjunto unitario; hallar el valor de "2m + n".

9. Dados los conjuntos iguales:

$$A = \{2x + y; 6\}$$

$$B = \{2x - y; 14\}$$

Hallar "x + y"

10. Cuántos subconjuntos tiene:

$$A = \{x^2 / x \in \mathbb{N} \wedge -2 < x < 4\}$$

## Bloque III

1. Dado el conjunto:  $A = \{1; 2; 3; \{4\}; 4; \{1; 3\}\}$

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

$$\text{I. } \{1; 3\} \in P(A)$$

$$\text{II. } \{4\} \in P(A)$$

$$\text{III. } \{\{4\}\} \in P(A)$$

$$\text{IV. } \{\{1; 3\}\} \in P(A)$$

$$\text{V. } \{1; 3; \{1; 3\}\} \subset P(A)$$

2. Determinar por extensión:  $A = \{x^3 - x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$   
Dar como respuesta la suma de sus elementos.

- a) 24                      b) 27                      c) 30  
d) 32                      e) 36

3. Dado el conjunto:  $B = \{-5; \{-3; 2\}; 2; \{2\}\}$   
Indicar cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas.

- I.  $\{2\} \subset B$                       II.  $\{2\} \in B$   
III.  $\emptyset \in B$                       IV.  $\{-3; 2\} \subset B$   
V.  $\{5; 2\} \subset B$

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 4                      e) 5

4. Si "A" es unitario, hallar " $x^2 + y$ ".

$$A = \{x + y; 20; x - y + 10\}$$

- a) 230                      b) 130                      c) 235  
d) 144                      e) 152

5.  $A = \{x / "x" \text{ es impar menor o igual que } 13\}$   
 $B = \{x / "x" \text{ es impar mayor que } 3 \text{ y menor que } 12\}$   
 $C = \{2x / "x" \text{ es primo menor que } 17\}$

Entonces son verdaderas:

- "A" está incluido en "B".
- "C" no está incluido en "B".
- "A" no está incluido en "C".

- a) Sólo 1                      b) Sólo 2                      c) 1 y 3  
d) 2 y 3                      e) Sólo 3

6. Dado el conjunto:

$$A = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{N}; 9 < 2x + 1 < 17\}$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) según correspondan:

- $n(A) = 7$ .
- Tiene 3 subconjuntos propios.
- La suma de sus elementos es 18.
- Su mayor elemento es 26.
- Tiene 8 subconjuntos.



