Lógica matemática

Los guardianes

Estamos encerrados en una habitación que tiene dos puertas ("A" y "B") con sendos guardianes que las custodian. Una de las puertas nos llevaría a la muerte y la otra nos dejaría vivir. De los dos guardianes, no sabemos el de que puerta, uno dice siempre la verdad y el otro siempre miente.

Si estamos obligados a elegir una de las puertas, ¿qué misma pregunta debemos formularle a ambos guardianes para averiguar la puerta que nos permite seguir viviendo?

• Proposición lógica

Antes de dar el concepto de lo que es una proposición, trataremos de establecer cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

a. 9 es divisible por 4.
b. Miguel Grau tuvo úlcera estomacal.
c. 6 es un número entero y par.
d. ¿Qué tiempo hace hoy?
e. ¡Socorro!
f. $x + 3 > 5$

Después de analizar cada una de ellas concluímos que (a) es falsa y (c) es verdadera; respecto de (b) es probable que dudemos en responder, pero lo cierto es que es o verdadera o falsa y no ambas ya que en la realidad debe haber ocurrido que Miguel Grau tuvo o no úlcera estomacal, pero sólo una de las posibilidades es correcta.

Por otra parte notamos que no tiene sentido afirmar que (d) y (e) son verdaderas o falsas y finalmente para establecer la verdad o falsedad de (f) necesitamos conocer el valor de "x" y no lo tenemos.

A los enunciados que como (a), (b) y (c) son unívocamente verdaderos o falsos se les denomina proposiciones; por esta razón (d) y (e) no son proposiciones (En general las preguntas y las exclamaciones no son proposiciones). Debemos anotar también que la expresión (f), si bien no es proposición, depende del valor de "x" para serlo; a este tipo de expresiones se les denomina funciones proposicionales o enunciados abiertos.

De lo anterior se desprende que:

Una proposición es toda expresión libre de ambigüedad y que tiene la propiedad de que es verdadera o falsa, pero sólo una de ellas.

Si una proposición es verdadera se le asignará el valor de verdad simbolizado por "V" y si es falsa se le asignará el valor de verdad simbolizado por "F".

Notación: Representaremos las proposiciones por letras minúsculas de la segunda mitad del alfabeto, como: "p"; "q"; "r"; "s", etc, que llamaremos variables proposicionales.

• Conectivos u operadores lógicos

A partir de dos proposiciones dadas podemos formar una tercera, si las unimos mediante expresiones como "y"; "o"; "si .... entonces"; "........... si y solo si ....", etc. A estas expresiones de enlace los llamaremos conectivos u operadores lógicos.

Por ejemplo:

p: 20 es un número par.
q: 20 es divisible por 5.
"p" y "q": 20 es un número par y es divisible por 5.

A. La negación (~)

Representa la inversión del valor de verdad de una proposición.

Por ejemplo:

p: 13 es un número primo.

Su negación es:

~p: No es cierto que 13 es un número primo.

Observamos en el ejemplo que "p" es verdadero y "~p" es falso; esto es porque "p" y "~p" tienen valores de verdad opuestos. En general:

p	~p
V	F
F	V

Se lee: No "p" / No es cierto que "p" / No es el caso que "p"

B. Conjunción ($\wedge$)

Dos proposiciones se enlazan por medio de la palabra "y" para formar una nueva proposición.

Por ejemplo:

p: Roxana comió pescado.
q: Roxana se indigestó.

La proposición quedaría:

"p" y "q": Roxana comió pescado y se indigestó

El valor de verdad de una conjunción será dado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen y de acuerdo a la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se lee: "p" y "q" / "p" no obstante "q" / "p" además "q" / "p" sin embargo "q" / "p" cada vez que "q" / "p" pero "q"

C. Disyunción inclusiva ($\vee$)

Dos proposiciones se enlazan por medio de la palabra "o" para formar una nueva proposición.

Por ejemplo:

p: 4 es menor que 7.
q: 4 es igual a 7.

La proposición quedaría:

"p" o "q": 4 es menor que 7 o igual a 7.

El valor de verdad de una disyunción inclusiva será dado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen y de acuerdo a la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se lee: "p" o "q"

Nota: También existe la llamada disyunción exclusiva que se denota por "$p \Delta q$"; se lee "o p o q" y es verdadera cuando solo una de las componentes es verdadera.

D. La condicional ($\rightarrow$)

Si "p" y "q" representan proposiciones cualesquiera, la condicional de "p" y "q" se denota por "$p \rightarrow q$" y se lee "si p, entonces q". En "$p \rightarrow q$", la proposición representada por "p" se denomina antecedente y la representada por "q", consecuente. Se dice también que el antecedente implica al consecuente.

Tratemos de precisar el significado de la condicional en un ejemplo:

"Si fumo un cigarro, entonces me aumenta la presión arterial".

El ejemplo afirma que en el caso que fume un cigarro debe ocurrir necesariamente que me aumente la presión arterial; esto es que si el antecedente es verdadero, el consecuente también debe serlo.

Notemos también que sólo será falsa cuando ocurra que me fume un cigarro y no me suba la presión arterial, esto es cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Por otra parte no se afirma que individualmente el antecedente o el consecuente sean verdaderos o falsos.

A partir de lo anterior consideraremos que una condicional sólo es falsa si tiene antecedente verdadero y consecuente falso y convendremos en que el valor de verdad de "$p \rightarrow q$" viene dado en la siguiente tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se lee: Si "p" entonces "q" / "p" implica "q" / "q" porque "p" / "p" dado que "q"

E. La bicondicional ($\leftrightarrow$)

Se denota por "$p \leftrightarrow q$" y se lee "p si y solo si q". "$p \leftrightarrow q$" afirma que "$p \rightarrow q$" y a la vez "$q \rightarrow p$" esto es que deben darse las dos condicionales.
Es decir los valores de verdad de "$p \leftrightarrow q$" dependen de los valores de "$p \rightarrow q$" y "$q \rightarrow p$", entonces:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En resumen:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Se lee: { "p" si y solo si "q"
"p" es condición necesaria y suficiente para "q".

• Tabla de verdad

A menudo es necesario representar proposiciones compuestas que pueden a su vez tener como componentes otras proposiciones compuestas; en este caso es necesario el uso de los signos de colección (paréntesis, corchetes, etc).
A esta representación mediante variables proposicionales, conectivos lógicos y signos de colección la llamaremos fórmula proposicional. Así por ejemplo:

$$p \wedge [\,(\sim p \rightarrow q) \vee \sim q\,]$$

Si en la fórmula anterior, se sabe que "p" es V y "q" es F, el valor de verdad lo obtenemos de la siguiente forma:

$$p \wedge [\,(\sim p \rightarrow q) \vee \sim q\,]$$

V F

F F

V V

V V

V

En otros casos es necesario determinar los valores de verdad de una fórmula para todas las combinaciones de los valores de verdad de las componentes, a este proceso se le denomina evaluar una fórmula en una tabla de verdad, por ejemplo:

p	q	p	∧ ④	[(~ ①	p	→ ②	q)	∨ ③	~ ①	q]
V	V	**V**	F	F	V	V	V	**V**	F	V
V	F	**V**	V	F	V	V	F	**V**	V	F
F	V	**F**	F	V	F	V	V	**F**	F	V
F	F	**F**	F	V	F	F	F	**V**	V	F

Los números indican el orden en que se han desarrollado los conectivos, primero se ha desarrollado las negaciones ①, luego se desarrolló el paréntesis ②, para después desarrollar el corchete ③, siendo el resultado final de la evaluación la columna debajo del número ④.

De acuerdo al resultado obtenido, una fórmula proposicional recibe un nombre especial, así tenemos que:

a. Si la fórmula resulta verdadera para cualquier combinación de los valores de verdad de las componentes, la fórmula se denomina **tautología**.
b. Si por el contrario resulta, siempre falsa recibe el nombre de **contradicción**.
c. Si no es tautología ni contradicción, la fórmula recibe el nombre de **contingencia**.

Observaciones:

1. Consideramos dos tipos de proposiciones: **simples** son aquellas que no contienen conectivos lógicos y **compuestas** que son las que contienen conectivos lógicos.

2. El número de posibles combinaciones de los valores de verdad de "n" proposiciones componentes es 2^n.
   Por ejemplo:
   Si: n = 2 → hay: $2^2 = 4$ combinaciones

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F

   Si: n = 3 → hay: $2^3 = 8$ combinaciones

p	V	V	V	V	F	F	F	F
q	V	V	F	F	V	V	F	F
r	V	F	V	F	V	F	V	F

3. Llamamos fórmulas proposicionales equivalentes, a aquellas que al ser unidas por el conectivo "↔" resulta una tautología. La equivalencia se denota por "≡".

Problemas para la clase

Bloque I

1. De acuerdo con la definición, ¿cuántas de las siguientes expresiones son proposiciones?

   * La división entre cero no existe.
   * 4973 es un número primo.
   * Micaela Bastidas murió a los 14 años.
   * El principito no podía comprender a los adultos.
   * ¿Miguel Grau nació en Piura?
   * ¡Vive la experiencia!
   * Mi mejor experiencia, fue a los 17 años.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

2. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son simples?

* 24 es número compuesto.
* El número 20 es par y el 15 es impar.
* Los números 40 y 27 son pares.
* Juan y Pedro son primos.
* Juan y Pedro son peruanos.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Si: $3 + 1 = 7$, entonces: $4 + 4 = 8$.
II. No es verdad que: $2 + 2 = 5$ si y solo si $4 + 4 = 10$.
III. Madrid está en España o Londres está en Francia.

a) VFV b) VVV c) VFF
d) FVF e) FFF

4. Un esquema conjuntivo representa a la proposición:

a) Tanto Pizarro como Maestri son jugadores.
b) La fiesta empezó al igual que el concurso.
c) Marco y Rubén toman chicha con ron.
d) Carlitos asiste a clases, sin embargo no escucha clases.
e) Todas.

5. ¿Qué proposición es: "Es el caso que eres postulante si te preparas en la academia"?

a) conjuntiva b) disyuntiva
c) bicondicional d) condicional
e) negativa

6. Simbolizar:

"No es el caso que Carlos sea médico o abogado; en conclusión, Carlos no es abogado".

a) $\sim p \vee q \rightarrow q$
b) $\sim q \rightarrow \sim(p \vee q)$
c) $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q$
d) $\sim(p \vee q) \rightarrow \sim q$
e) $\sim(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim q$

7. "El fiscal de la nación ejercerá sus funciones salvo que no jure".

La proposición anterior es:

a) conjuntiva b) bicondicional
c) disyuntiva d) condicional
e) negativa

8. Una proposición disyuntiva inclusiva, será:

a) Héctor es soltero o casado.
b) Si hay dinero; iremos de vacaciones.
c) La leche está fría o caliente.
d) Rommel es líder y orador.
e) Eres tú o soy yo, ¿quién se casará con Diana?

9. En la siguiente tabla:

p	q	$[(p \rightarrow q) \wedge p]$	$\rightarrow$	q
V	V		①	
V	F		②	
F	V		③	
F	F		④	

Los valores de verdad que deben reemplazar a los círculos en el orden indicado son:

a) VVVV b) VFFV c) VVFF
d) FFFF e) FVFV

10. Indicar el valor de verdad de:

I. $p \rightarrow (p \vee q)$
II. $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
III. $\sim[(p \wedge q) \rightarrow p]$

a) VVV b) VFV c) VFF
d) FVF e) FVV

11. Si la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ es falsa, deducir el valor de verdad de: $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$

a) V
b) F
c) V o F
d) no se puede determinar
e) ninguna

12. Si: $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$; es falsa, determinar los valores de verdad de "p", "q" y "r".

a) VVF b) VFF c) VVV
d) VFV e) FFF

Bloque II

1. Dadas las proposiciones:

p: Marco es comerciante
q: Marco es un próspero industrial
r: Marco es ingeniero

Simbolizar el enunciado:
"Si no es el caso que, Marcos sea un comerciante y un próspero industrial, entonces es ingeniero o no es comerciante".

a) $\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$
b) $(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge q)$

c) $\sim(p \vee q) \to (r \vee p)$
d) $\sim(p \wedge q) \to (r \vee \sim p)$
e) $(\sim p \wedge \sim q) \to (\sim r \vee p)$

2. Los valores de verdad de las proposiciones "p", "q", "r" y "s" son respectivamente V, F, F y V.
Obtener los valores de verdad de:

I. $[(p \vee q) \vee r] \wedge s$
II. $r \to (s \wedge p)$
III. $(p \vee r) \to (r \wedge \sim s)$

a) VFF b) FVV c) VVV
d) VVF e) FFF

3. Hallar la tabla de verdad de:

p	q	$(p \vee q)(p$	$\to q)$	$\wedge$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

a) VVFF b) VFFV c) VFVF
d) VVVV e) FFFF

4. Si: $(\sim p)\ \Delta\ r$; es verdadero; los valores de verdad de:
I. $(p \wedge s) \to (r \vee s)$
II. $(p\ \Delta\ r) \wedge s$
son:

a) VV b) VF c) FV
d) FF e) faltan datos

5. Sabiendo que:
* $(p \to q) \vee \sim r$; es falsa
* $(s \leftrightarrow p)\ \Delta\ r$; es verdadera
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. $\sim(p \vee s) \equiv V$
II. $(s \wedge r) \equiv F$
III. $q \to s \equiv V$

a) I y II b) I y III c) II y III
d) todas e) sólo una de ellas

6. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes?

A: $(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)$
B: $p\ \Delta\ (r \to q)$
C: $\sim q \to \sim p$

a) A y B b) A y C c) B y C
d) A, B y C e) no son equivalentes

7. Si las siguientes proposiciones: p
$\vee \sim q$ y $q \wedge p$ son falsas.
Determinar el valor de verdad de:

I. $(q \to p) \wedge \sim(q \to \sim p)$
II. $(q \to \sim p) \to (q \to p)$

a) VV b) VF c) FF
d) FV e) N.A.

8. De la falsedad de la proposición:
$(p \to \sim q) \vee (\sim r \to s)$ se deduce que el valor de verdad de los esquemas:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$
II. $(\sim r \vee q) \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
III. $(p \to q) \to [(p \vee q) \wedge \sim q]$

son respectivamente:

a) VFV b) FFF c) VVV
d) VVF e) FFV

9. Indicar el valor de verdad de:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \vee q)$
es una contradicción.
II. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
es una tautología.
III. $[p \wedge (p \to q)] \to (q\ \Delta\ r)$
es una contingencia.

a) VVV b) VVF c) VFF
d) VFV e) FVV

10. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones compuestas son tautológicas?

I. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$ II.
$(q \to \sim p)\ \Delta\ (p \wedge \sim q)$ III.
$(\sim q \leftrightarrow p) \to (q\ \Delta \sim p)$

a) sólo I b) sólo II c) sólo III
d) I y II e) I y III

11. Si la proposición compuesta: $(p \wedge q) \to (r \vee t)$ es falsa. Indicar las proposiciones que son verdaderas:

a) p; r b) p; q c) r; t
d) q; t e) p; r; t

12. Si la proposición: $p \to (r \vee s)$ es falsa, ¿cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $(\sim s \vee t) \vee \sim p$ II. $r \leftrightarrow p$
III. $t \to \sim r$ IV. $(r \to p) \vee (s \to t)$

a) ninguna b) una c) dos
d) tres e) cuatro

13. De las proposiciones, ¿cuál es una contradicción?

I. $\sim[\ \sim(p \vee q) \to q\ ] \wedge (p \to q)$
II. $\sim[\ \sim p \to q\ ] \to (p \to q)$

a) I b) II c) I y II
d) ninguna e) F.D.

14. De la falsedad de: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow \sim s)$ se deduce que los valores veritativos de:

I. $\sim(\sim q \vee \sim s) \rightarrow \sim p$
II. $\sim(\sim r \wedge s) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
III. $p \rightarrow \sim[q \rightarrow \sim(s \rightarrow r)]$ son:

a) FFV b) FFF c) FVF
d) FVV e) VFF